Höhere Mathematik 3

Prof. Dr. Norbert Knarr

FB Mathematik

Wintersemester 2011/12

1. Integration von Funktionen in zwei Variablen

1.1. Integral auf Rechtecken

Wir betrachten ein beschränktes Rechteck
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\} \subsetneqq \mathbb{R}^2$ und eine beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$.
Gesucht ist das Volumen der Säule im Raum mit Grundfläche B, die die Fläche $z = f(x, y)$ als Deckel hat. Dabei werden Volumina unterhalb der (x, y)-Ebene negativ gezählt.
Wir gehen vor wie bei der Berechnung der Fläche unter dem Graphen einer Funktion von einer Variablen; vgl. A 3.5.
Wir zerlegen die Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ in m bzw. n Teilintervalle und erhalten eine Partition P von B in Teilrechtecke
$B_{jk}, j = 1, \ldots m, k = 1, \ldots n.$

Wir setzen

$$\begin{aligned} I_{jk} &= \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in B_{jk}\} \\ S_{jk} &= \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in B_{jk}\} \\ F(B_{jk}) &= \text{Flächeninhalt des Rechtecks } B_{jk} \end{aligned}$$

Der Rauminhalt der Säule mit Grundfläche B, der nach oben durch die Fläche $z = f(x, y)$ begrenzt wird, liegt zwischen

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} I_{jk} \cdot F(B_{jk})$$

und

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} S_{jk} \cdot F(B_{jk})$$

1.1.1. Definition.

Für jede beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\underline{S} := \sup\left\{ \underline{S}(f, P) \;\middle|\; P \text{ Partition von } B \right\}$$

$$\overline{S} := \inf\left\{ \overline{S}(f, P) \;\middle|\; P \text{ Partition von } B \right\}$$

Man nennt f Riemann-integrierbar, wenn $\underline{S} = \overline{S}$ gilt. In diesem Fall heißt der Wert $\underline{S}$ das Gebietsintegral (oder Riemann-Integral) von f über B.
Das Gebietsintegral ist eine reelle Zahl.
Man schreibt dann auch

$$\int\int_B f(x, y)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y$$

für diesen Wert.

Ähnlich wie bei der mehrdimensionalen Differentialrechnung lässt sich die konkrete Berechnung von Gebietsintegralen häufig auf die Berechnung eindimensionaler Integrale zurückführen.

1.1.2. Satz von Fubini.

Wir setzen voraus, dass die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ stetig ist.
Für jedes feste $x \in [a, b]$ ist dann $y \mapsto f(x, y)$ eine stetige Funktion von $[c, d]$ nach $\mathbb{R}$, und folglich existiert das (eindimensionale) Integral

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}\, y.$$

Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist dann ebenfalls stetig (also auch integrierbar), und es gilt

$$\int\int_B f(x, y) \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \int_a^b F(x) \, \mathrm{d}\, x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, x.$$

Bei diesem Prozess kann man auch die Rollen von x und y vertauschen, also für festes $y \in [c, d]$ das Integral

$$G(y) := \int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}\, x$$

bilden, das wieder stetig von y abhängt; dann gilt auch

$$\int\int_B f(x, y) \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \int_c^d G(y) \, \mathrm{d}\, y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, y.$$

1.1.3. Beispiel.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y$ und den Bereich $B = [1, 4] \times [2, 3]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= \int_2^3 \left(\int_1^4 (x^2 + y)\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y \\
&= \int_2^3 \left[\frac{1}{3}x^3 + yx \right]_{x=1}^{x=4} \mathrm{d}\,y \\
&= \int_2^3 \left(\frac{1}{3} \cdot 64 + 4y - \frac{1}{3} - y \right) \mathrm{d}\,y \\
&= \int_2^3 (21 + 3y)\,\mathrm{d}\,y \\
&= \left[21y + \frac{3}{2}y^2 \right]_{y=2}^{y=3} = \frac{57}{2}
\end{aligned}$$

Gibt $\int_1^4 \left(\int_2^3 (x^2 + y)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x$ wirklich das gleiche?

1.2. Integration über allgemeine Bereiche

Für eine beliebige kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) Teilmenge $D \subsetneq \mathbb{R}^2$ und eine beschränkte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wählen wir ein Rechteck B mit $D \subseteq B$ und definieren eine Funktion $\chi_D f : B \to \mathbb{R}$ durch

$$\chi_D f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{falls } (x,y) \in D \\ 0 & \text{falls } (x,y) \in B \setminus D \end{cases}$$

(in der Regel ist $\chi_D f$ unstetig, auch wenn f stetig ist.)
Ist $\chi_D f$ integrierbar, so nennt man f über D integrierbar und schreibt

$$\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int\int_B \chi_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

Man kann zeigen, dass der Wert dieses Integrals unabhängig von B ist. Es erhebt sich die Frage, wie man feststellt, ob eine Funktion f über einen Bereich D integrierbar ist, und wie man ggfs. das Integral berechnet.

1.3.1. Definition.

1. Für zwei stetige Funktionen $g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \leqq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$ heißt

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b, g(x) \leqq y \leqq h(x)\}$$

Normalbereich bezüglich der x-Achse.

2. Für zwei stetige Funktionen $g, h\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ mit $g(y) \leqq h(y)$ für alle $y \in [c, d]$ heißt

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leqq y \leqq d, g(y) \leqq x \leqq h(y)\}$$

Normalbereich bezüglich der y-Achse.

1.3.2. Bemerkung.

Ein zusammenhängender Bereich $D \subsetneqq \mathbb{R}^2$ ist genau dann ein Normalbereich bezüglich der x-Achse, wenn der Schnitt von D mit jeder Parallelen zur y-Achse ein Intervall (auf dieser Parallelen) ist. Die Endpunkte dieses Intervalls sind durch $g(x)$ bzw. $h(x)$ gegeben. D ist also eine Vereinigung von Intervallen, deren Anfangs- und Endpunkte von x abhängen.
Die analoge Beschreibung gilt auch für Normalbereiche längs der y-Achse (mit x und y vertauscht).

1.3.3. Beispiel.

Kreise sind Normalbereiche längs beider Achsen.

1.3.4. Satz.

Eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *auf einem Normalbereich* $D \subsetneq \mathbb{R}^2$ *ist integrierbar und es gilt:*

$$\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x$$

falls D *ein Normalbereich bezüglich der* x*-Achse ist; sowie*

$$\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y$$

falls D *ein Normalbereich bezüglich der* y*-Achse ist.*

Bei der Integration über Normalbereiche kann man die Integrationsreihenfolge i. A. nicht vertauschen, da im "inneren" Integral die Integrationsgrenzen variabel sind. Die Integrationsgrenzen des "äußeren" Integrals müssen reelle Zahlen sein.
Wenn man das nicht beachtet, erhält man ein Ergebnis, das von x oder y abhängt. Der Wert des Integrals ist jedoch eine Zahl.

1.3.5. Beispiel.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y$ und den Bereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1 - x^2\}$. Dies ist ein Normalbereich bezüglich der x-Achse mit $a = -1, b = 1, g(x) = 0$ und $h(x) = 1 - x^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{1-x^2} (x^2 + y)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x \\
&= \int_{-1}^{1} \left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x^2} \mathrm{d}\,x \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x^2(1-x^2) + \frac{1}{2}(1-x^2)^2 \right) \mathrm{d}\,x \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{2}(1 - 2x^2 + x^4) \right) \mathrm{d}\,x \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1 - x^4)\,\mathrm{d}\,x \quad = \quad \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

1.3.6. Beispiel (Volumen von Drehkörpern).

Gegeben sei eine stetige Funktion $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $r(x) \geqq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Gesucht ist das Volumen V des Drehkörpers, der bei Rotation des Graphen von r um die $x-$Achse entsteht.
Für $x \in [a,b]$ und $-r(x) \leqq y \leqq r(x)$ liegt der Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $z \geqq 0$ genau dann auf der Oberfläche des Drehkörpers, wenn gilt

$$y^2 + z^2 = r(x)^2$$

bzw.

$$z = \sqrt{r(x)^2 - y^2} =: f(x,y)$$

Mit Hilfe des Normalbereichs

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b, -r(x) \leqq y \leqq r(x)\}$$

berechnet man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V &= \int\int_D f(x, y) \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \\ &= \int_a^b \left(\int_{-r(x)}^{r(x)} \sqrt{r(x)^2 - y^2} \, \mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, x \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} \pi r(x)^2 \, \mathrm{d}\, x, \end{aligned}$$

da $\int_{-r(x)}^{r(x)} \sqrt{r(x)^2 - y^2} \, \mathrm{d}\, y$ gerade die Fläche des Halbkreises mit Radius $r(x)$ ergibt. Damit erhält man das gesuchte Volumen als

$$V = \pi \int_a^b r(x)^2 \, \mathrm{d}\, x$$

1.3.7. Beispiel (Volumen der Kugel vom Radius R).

Setze $a = -R, b = R$ und $r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Dann entsteht die Kugel vom Radius R durch Rotation des Graphen von r um die x-Achse. Also ergibt sich für das Volumen der Kugel

$$V = \pi \int_{-R}^{R} r(x)^2 \, \mathrm{d}\, x = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, \mathrm{d}\, x = \frac{4}{3} \pi R^3$$

1.4. Von Kurven berandete Bereiche

1.4.1. Definition.

Eine stückweise glatte reguläre einfache geschlossene Kurve $K \subsetneq \mathbb{R}^2$ ist die Menge der Bildpunkte einer stetigen Parametrisierung

$$C\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$$

mit folgenden Eigenschaften:

- $C(a) = C(b)$ (geschlossen);
- $C(t_1) \neq C(t_2)$ für alle $t_1, t_2 \in [a,b)$ mit $t_1 \neq t_2$ (einfach);
- C ist stückweise 2-mal differenzierbar, d.h. es existiert eine Partition $a = a_0 < a_1 < \ldots a_n = b$ so, dass die Einschränkung von C auf jedes der Teilintervalle $[a_j, a_{j+1}]$ 2-mal differenzierbar ist (stückweise glatt);
- Für $t \in [a_j, a_{j+1}]$ ist $C'(t) = (C_1'(t), C_2'(t)) \neq (0,0)$ (regulär).

1.4.2. Satz.

1. *(Jordanscher Kurvensatz) Die geschlossene Kurve K ist der Rand eines beschränkten Gebietes J, des sogenannten Innengebietes von K.*
2. *Sei $\overline{J} = J \cup K$ der von K berandete Bereich. Dann ist jede stetige Funktion $f\colon \overline{J} \to \mathbb{R}$ über $\overline{J}$ integrierbar.*

Die Aussage des Jordanschen Kurvensatzes ist anschaulich klar, aber der Beweis ist nicht ganz einfach.
Der Beweis der zweiten Aussage und die Berechnung des Integrals erfolgt durch Zerlegung von $\overline{J}$ in Normalbereiche.

1.4.3. Definition.

Eine Parametrisierung C von K heißt positiv orientiert, wenn das Innengebiet J bei der Durchlaufung der Kurve links von der Kurve liegt.

1.4.4. Bemerkung.

Ist D ein Normalbereich oder ein von einer Kurve wie in 1.4.2 berandeter Bereich, so ist

$$\int\int_D 1 \cdot \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

der Flächeninhalt von D (als Volumen einer Platte der Dicke 1 mit Grundfläche D).

1.4.5. Satz (Rechenregeln für Integrale).

1. *Es seien* $f, g : D \to \mathbb{R}^2$ *integrierbar und* $a, b \in \mathbb{R}$, *dann gilt*

$$\begin{aligned}&\int\int_D (af(x,y) + bg(x,y))\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\\ &= a\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + b\int\int_D g(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\end{aligned}$$

   (Linearität des Integrals)

2. *Aus* $f(x,y) \leqq g(x,y)$ *für alle* $(x,y) \in D$ *folgt*

$$\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \leqq \int\int_D g(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

   (Monotonie des Integrals)

3. Wenn D und E zwei Bereiche im $\mathbb{R}^2$ sind, deren Schnitt $D \cap E$ im Rand von D bzw. E enthalten ist, dann gilt für jede über D und E integrierbare Funktion f:

$$\iint_{D\cup E} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

(Additivität des Integrals)

1.4.6. Bemerkung.

Mit Hilfe der Integrationsregeln lässt sich das Integral einer komplizierten Funktion über einen komplizierten Bereich D als Summe von Integralen einfacherer Funktionen über normale Teilbereiche von D schreiben.

1.5. Integralsätze im $\mathbb{R}^2$

1.5.1. Definition.

Sei $D \subsetneqq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und sei $K \subsetneqq D$ eine stückweise glatte reguläre einfache geschlossene Kurve. Weiterhin sei $g\colon D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und sei $C\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte stückweise glatte reguläre Parametrisierung von K. Sei $a = a_0 < a_1 < \ldots a_n = b$ eine Partition von $[a,b]$ so, dass die Einschränkung von C auf jedes der Teilintervalle $[a_j, a_{j+1}]$ 2-mal differenzierbar ist. Dann heißt das Kurvenintegral

$$Z(g,K) = \int_K g(s)\,\mathrm{d}\,s = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(C(t)) \cdot C'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

die Zirkulation von g längs K; vgl. A 5.4.9.

Gemäß A 5.2.3 heißt $\operatorname{rot} g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{rot} g = \dfrac{\partial g_2}{\partial x} - \dfrac{\partial g_1}{\partial y}$ die Rotation von g.

1.5.2. Satz von Green.

Die Voraussetzungen von 1.5.1 seien erfüllt und es bezeichne $\overline{J}$ den von K berandeten Bereich, dann gilt:

$$Z(g, K) = \int_K g(s) \cdot \mathrm{d}\, s = \iint_{\overline{J}} \operatorname{rot} g \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y.$$

1.5.3. Bemerkungen.

1. Es ist wichtig, dass K eine geschlossene Kurve ist, andernfalls lässt sich der Satz gar nicht formulieren da der Bereich $\overline{J}$ nicht existiert.
2. Der Satz von Green drückt ein Kurvenintegral durch ein Gebietsintegral aus. Manchmal ist das eine, manchmal das andere leichter zu berechnen.
3. Ist überall $\operatorname{rot} g = 0$, so ist g auf $\overline{J}$ ein Gradientenfeld (A 5.2.4), also ist das Integral $\int_K g(s) \cdot \mathrm{d}\, s$ über die geschlossene Kurve K gleich Null (A 5.3.14).
4. Der Satz lässt sich verallgeinern auf Bereiche, deren Rand aus mehreren geschlossenen Kurven besteht.

1.5.4. Beispiel.

Es sei K der Einheitskreis und entsprechend $\overline{J}$ die Einheitskreisscheibe. Eine zulässige Parametrisierung ist gegeben durch $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $C(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Für das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\int_K g(s) \cdot \mathrm{d}\, s = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \mathrm{d}\, t = 2\pi$$

Wegen $\operatorname{rot} g(x, y) = 1 + 1 = 2$ gilt andererseits

$$\int\int_{\overline{J}} \operatorname{rot} g \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \int\int_{\overline{J}} 2 \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = 2\pi$$

Also stimmen die Ergebnisse wie behauptet überein.

1.5.5. Definition.

Die Voraussetzungen von 1.5.1 seien erfüllt und es bezeichne $\overline{J}$ den von K berandeten Bereich.
Für $t \in [a_{j-1}, a_j]$ sei $n(t)$ der äußere Normaleneinheitsvektor an K im Punkte $C(t)$, d.h. es gilt:

- $|n(t)| = 1$;
- $C'(t) \cdot n(t) = 0$;
- $n(t)$ zeigt von $\overline{J}$ aus gesehen nach außen.

Dann heißt

$$A(g, K) = \int_K g \cdot n \, \mathrm{d}\, s = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(C(t)) \cdot n(t) |C'(t)| \, \mathrm{d}\, t$$

der Ausfluss von g durch K, vgl. A 5.4.9.

1.5.6. Bemerkung.

Da C eine positiv orientierte Parametrisierung von K ist, entsteht $n(t)$ aus $C'(t)$ durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn und Normierung auf Einheitslänge. Mit $C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$ gilt also $n(t) = \frac{1}{|C'(t)|} \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich für den Ausfluss

$$A(g, K) = \int_K g \cdot n \, \mathrm{d}\, s = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(C(t)) \cdot \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t.$$

Gemäß A 5.2.1 heißt $\operatorname{div} g \colon D \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}$ die Divergenz von g.

1.5.7. Satz von Gauß, Divergenzsatz.

Die Voraussetzungen von 1.5.1 seien erfüllt und es bezeichne $\overline{J}$ den von K berandeten Bereich, dann gilt:

$$A(g, K) = \int_K g \cdot n \, \mathrm{d}\, s = \int\int_{\overline{J}} \operatorname{div} g \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y.$$

Der Satz von Gauß lässt sich auf den Satz von Green zurückführen.
Setze dazu $h(x,y) = \begin{pmatrix} -g_2(x,y) \\ g_1(x,y) \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\operatorname{rot} h = \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} = \operatorname{div} g$$

und

$$\begin{aligned} h(C(t)) \cdot C'(t) &= -g_2(C(t)) \cdot C_1'(t) + g_1(C(t)) \cdot C_2'(t) \\ &= g(C(t)) \cdot \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} A(g,K) &= \int_K g \cdot n \,\mathrm{d}\, s = \int_K h \cdot \mathrm{d}\, s = Z(h,K) \\ &= \iint_{\overline{J}} \operatorname{rot} h \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = \iint_{\overline{J}} \operatorname{div} g \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \end{aligned}$$

und damit der Satz von Gauß.

1.5.8. Bemerkung.

Die Anwendung der Differentialoperatoren rot oder div macht aus einem Vektorfeld g auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Skalarfeld auf D.
Die Sätze von Green bzw. Gauß besagen, dass das Integral dieses Skalarfeldes über einen Bereich $\overline{J} \subsetneqq D$ schon durch die Werte des Vektorfeldes g auf der Randkurve K von $\overline{J}$ festgelegt ist.
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass das Integral der Ableitung einer Funktion f über ein Intervall schon durch die Werte von f auf dem Rand des Intervalls festgelegt ist.
Beide Integralsätze können daher als 2-dimensionale Analoga des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aufgefasst werden.
Das gilt auch für den Satz über die wegunabhängige Integrierbarkeit von Gradientenfeldern, vgl. A 5.3.10.

1.5.9. Beispiel (Flächenberechnung mit Hilfe von Kurvenintegralen).

Wir betrachten ein Vektorfeld g auf $\mathbb{R}^2$ mit konstanter Divergenz c; z.B. $g(x,y)=(x,0)$ (oder $h(x,y)=(0,y)$), beide mit Divergenz 1. Dann gilt für eine Kurve K wie in 1.5.1 und das von ihr berandete Gebiet $\overline{J}$:

$$\int_K g\cdot n\,\mathrm{d}\,s=\int\int_{\overline{J}}\operatorname{div} g\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int\int_{\overline{J}}c\cdot\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=c\cdot F(\overline{J});$$

wobei $F(\overline{J})$ die Fläche von $\overline{J}$ bezeichnet. Mit den Vektorfeldern g bzw. h gilt also:

$$F(\overline{J})=\sum_{j=1}^{n}\int_{a_{j-1}}^{a_j}C_1(t)\cdot C_2'(t)\,\mathrm{d}\,t=\sum_{j=1}^{n}-\int_{a_{j-1}}^{a_j}C_2(t)\cdot C_1'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

1.5.10. Beispiel (Flächeninhalt von Ellipsen).

Eine zulässige Parametrisierung der Ellipse mit Halbachsen $a,b>0$ ist gegeben durch $C\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2\colon t\mapsto\begin{pmatrix}a\cos t\\ b\sin t\end{pmatrix}$. Damit ergibt sich der Flächeninhalt der Ellipse als:

$$F(E)=\int_0^{2\pi}a\cos t\cdot b\cos t\,\mathrm{d}\,t=-\int_0^{2\pi}b\sin t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}\,t$$

Da beide Integrale gleich sind, gilt also:

$$2F(E)=\int_0^{2\pi}ab((\cos t)^2+(\sin t)^2)\,\mathrm{d}\,t=2\pi ab$$

und damit $F(E)=\pi ab$.

Das Beispiel zeigt, dass es auch sinnvoll sein kann, den Mittelwert der beiden Integrale zu nehmen.

1.6. Koordinatentransformationen

1.6.1. Definition.

Seien P und Q offene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Eine Abbildung $\psi : P \to Q : (u, v) \mapsto (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))$ heißt Koordinatentransformation, wenn gilt:

- ψ ist injektiv;
- ψ ist stetig differenzierbar;
- an jeder Stelle $(u, v) \in P$ ist die Jacobi-Matrix

$$J\psi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

  regulär; d.h. $\det J\psi(u, v) \neq 0$.

Die Determinante der Jacobimatrix heißt auch die Funktionaldeterminante von ψ an der Stelle (u, v).

1.6.2. Satz (Substitutionsregel; Transformationsformel).

In der Situation von 1.6.1 sei eine kompakte Teilmenge $B \subsetneq P$ und ihr Bild $D = \psi(B) \subsetneq Q$ sowie eine integrierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist die Funktion $g = f \circ \psi : B \to \mathbb{R}$ ebenfalls integrierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \int\int_D f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= \int\int_{\psi(B)} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\ &= \int\int_B (f \circ \psi)(u, v) \cdot |\det J\psi(u, v)|\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v \\ &= \int\int_B g(u, v) \cdot |\det J\psi(u, v)|\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v \end{aligned}$$

1.6.3. Bemerkungen.

1. Der Satz ist das zweidimensionale Analogon zur Substitutionsregel in einer Veränderlichen

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x(t))\cdot x'(t)\,\mathrm{d}\,t;$$

   vgl. A 3.3.3. Der Faktor $x'(t)$ entspricht der Funktionaldeterminante. Bei einer Variablen kann man die Integrationsrichtung unterscheiden, d.h. $x(b)$ kann kleiner als $x(a)$ sein. Daher stehen bei $x'(t)$ keine Betragsstriche.
2. Bei Anwendung einer linearen Abbildung mit Matrix A multipliziert sich die Fläche eines Parallelogramms mit der Determinante von A. Da die Jacobi-Matrix die lineare Approximation der Koordinatentransformation beschreibt, vgl. A 4.7.2, ist es daher plausibel, dass die Determinante der Jacobi-Matrix die Rolle des Flächenverzerrungsfaktors spielt.

1.6.4. Beispiel (Polarkoordinaten).

Setze $P = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$ und $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geqq 0\}$. Polarkoordinaten sind durch die Transformation $\psi : P \to Q : (r,\varphi) \mapsto (r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)$ gegeben. Für die Funktionaldeterminante ergibt sich:

$$\det J\psi(r,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{pmatrix} = r((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2) = r.$$

Weil ψ auf P injektiv ist, ist ψ auf P eine Koordinatentransformation. Für einen Bereich $B \subsetneqq P$, sein Bild $D = \psi(B) \subsetneqq Q$ und eine integrierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gilt also:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint_B f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\cdot r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi.$$

Durch andere Wahl von P, etwa indem man φ zwischen $-\pi$ und π laufen lässt, kann man erreichen, dass Q die positive x-Achse enthält.

1.6.5. Beispiel (Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$).

Setze $I_a = \int_0^a e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$ für $a > 0$. Aus Symmetriegründen gilt dann $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = 2\lim_{a\to\infty} I_a$. Wir quadrieren jetzt I_a und ändern einmal die Integrationsvariable. Das ergibt

$$I_a^2 = \left(\int_0^a e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\right)\cdot\left(\int_0^a e^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y\right) = \int\int_{[0,a]\times[0,a]} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

Für $s > 1$ betrachten wir den Kreisringabschnitt $D_s = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0, y \geqq 0, \frac{1}{s} \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq s\}$. Dann gilt

$$\lim_{a\to\infty}\int\int_{[0,a]\times[0,a]} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \lim_{s\to\infty}\int\int_{D_s} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

Mit der Polarkoordinatenabbildung ψ gilt $D_s = \psi([\frac{1}{s}, s]\times[0,\frac{\pi}{2}])$. Dabei muss P geeignet gewählt werden.

Durch Anwendung von 1.6.4 können wir daher schreiben:

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_s} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= \int\int_{[\frac{1}{s},s]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-((r\cdot\cos\varphi)^2+(r\cdot\sin\varphi)^2)}\cdot r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi \\
&= \int_{\frac{1}{s}}^{s}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}\,\varphi\right)\mathrm{d}\,r \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{s}}^{s} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}\,r \\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{\frac{1}{s}}^{s} \\
&= \frac{\pi}{4}\left(-e^{-s^2} + e^{-\frac{1}{s^2}}\right)
\end{aligned}$$

Für $s \to \infty$ konvergiert dieser Ausdruck (und damit auch I_a^2) gegen $\frac{\pi}{4}$. Also ergibt sich für unser gesuchtes Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = 2\lim_{a\to\infty} I_a = \sqrt{\pi}.$$

2. Integration von Funktionen in drei Variablen

2.1. Integration über Flächenstücke im Raum

2.1.1. Definition.

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann heißt Φ Parameterdarstellung für ein Flächenstück $S = \Phi(D)$ wenn gilt:

- Φ ist injektiv;
- für jeden Punkt $(u, v) \in D$ hat die Jacobi-Matrix $J\Phi(u, v)$ den Rang 2, d.h. ihre Spalten sind linear unabhängig.

Die Menge $S = \Phi(D)$ heißt das von Φ erzeugte Flächenstück.

Die Spalten der Jacobi-Matrix sind die partiellen Ableitungen von Φ nach den Variablen u und v, vgl. A 4.7.1. Die Spalten von $J\Phi(u, v)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für ihr Kreuzprodukt gilt $\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v) \neq 0$; vgl. L 2.10.3.6.

Für einen festen Parameterwert $(u_0, v_0) \in D$ werden durch $C(t) = \Phi(u_0 + t, v_0)$ und $D(t) = \Phi(u_0, v_0 + t)$ für t in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ Kurven auf der Fläche $S = \Phi(D)$ parametrisiert. Für die Tangentenvektoren an diese Kurven für $t = 0$ gilt $C'(0) = \Phi_u(u_0, v_0)$ und $D'(0) = \Phi_v(u_0, v_0)$. Also erzeugen diese beiden Vektoren die Tangentialebene an die Fläche S im Punkte $\Phi(u_0, v_0)$, und die lineare Unabhängigkeit sorgt dafür, dass es sich wirklich um eine Ebene handelt. Diese Tangentialebene ist gegeben durch

$$\Phi(u_0, v_0) + \mathbb{R}\Phi_u(u_0, v_0) + \mathbb{R}\Phi_v(u_0, v_0).$$

Der Vektor $\Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)$ ist der Normalenvektor an die Fläche S im Punkt $\Phi(u_0, v_0)$, und

$$\frac{\Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)}{|\Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)|}$$

ist der Einheitsnormalenvektor.

2.1.2. Beispiel (Oberfläche der Kugel mit Radius R).

Diese Fläche ohne den Nullmeridian wird beschrieben durch

$$\Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3 : (\varphi, \vartheta) \mapsto R \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\Phi_\varphi = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi_\vartheta = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix};$$

$$\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta = R^2 \cdot \begin{pmatrix} -(\sin\vartheta)^2 \cdot \cos\varphi \\ -(\sin\vartheta)^2 \cdot \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \end{pmatrix} = -R \cdot \sin\vartheta \cdot \Phi(\varphi, \vartheta).$$

Dieser Vektor ist nur dann Null, wenn $\sin\vartheta = 0$ gilt, und das ist im gewählten Parameterbereich nie der Fall.

2.1.3. Definition.

Es sei $D \subsetneqq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung für ein Flächenstück. Weiterhin sei $\overline{J} \subsetneq D$ ein von einer stückweise glatten regulären einfachen geschlossenenen Kurve K begrenzter Bereich und $S = \Phi(\overline{J})$. Dann heißt

$$F(S) = \int\int_{\overline{J}} |\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)| \,\mathrm{d}\, u \,\mathrm{d}\, v$$

der Flächeninhalt der Fläche S.

2.1.4. Bemerkungen.

1. Die etwas schwerfällige Definition vermittels D und $\overline{J}$ hat damit zu tun, dass Parametrisierungen differenzierbar sein sollen (und deshalb einen offenen Definitionsbereich haben); integriert wird aber über kompakte, insbesondere abgeschlossene Mengen.
2. Gemäß L 2.10.3.5 ist $|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)|$ der Flächeninhalt des von $\Phi_u(u,v)$ und $\Phi_v(u,v)$ aufgespannten Parallelogramms. Es ist daher plausibel, dass das Integral über diesen Ausdruck die Gesamtfläche ergibt.

2.1.5. Beispiel (Inhalt der Kugeloberfläche vom Radius R).

Mit der Parametrisierung aus 2.1.2 erhalten wir für die Länge des Normalenvektors im Punkte $(\varphi, \vartheta) \in D$

$$|\Phi_\varphi(\varphi,\vartheta) \times \Phi_\vartheta(\varphi,\vartheta)| = |-R \cdot \sin\vartheta \cdot \Phi(\varphi,\vartheta)| = R^2 \cdot \sin\vartheta.$$

Also gilt für die gesuchte Oberfläche:

$$\begin{aligned} F &= \int\int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} R^2 \cdot \sin\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,\vartheta \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} R^2 \cdot \sin\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \right) \mathrm{d}\,\vartheta \\ &= 2\pi R^2 \cdot \int_0^\pi \sin\vartheta \,\mathrm{d}\,\vartheta \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

2.1.6. Beispiel (Wendelfläche).

Wir betrachten den Bereich $\overline{J} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}$ und die Wendelfläche $S = \Phi(\overline{J})$, die durch die Parametrisierung

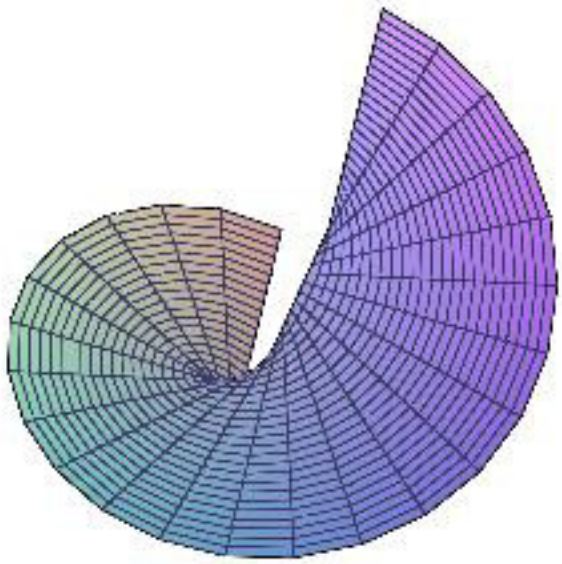
$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ k \cdot \varphi \end{pmatrix}$$

mit $k > 0$ gegeben ist. Es gilt

$$\Phi_r(r,\varphi) \times \Phi_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \cos\varphi \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot \sin\varphi \\ -k \cdot \cos\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

und

$$|\Phi_r(r,\varphi) \times \Phi_\varphi(r,\varphi)| = \sqrt{k^2 + r^2} \neq 0.$$



Damit erhalten wir für den Inhalt der Wendelfläche

$$\begin{aligned} F(S) &= \int\int_{\overline{J}} \sqrt{k^2+r^2}\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{k^2+r^2}\,\mathrm{d}\,\varphi \right) \mathrm{d}\,r \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{k^2+r^2}\,\mathrm{d}\,r. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $r = k \cdot \sinh t$, also $\mathrm{d}\,r = k \cdot \cosh t\,\mathrm{d}\,t$, und der Beziehung $(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$ ergibt sich:

$$\int \sqrt{k^2+r^2}\,\mathrm{d}\,r = \int \sqrt{k^2+k^2\cdot(\sinh t)^2} \cdot k \cosh t\,\mathrm{d}\,t = \int k^2 (\cosh t)^2\,\mathrm{d}\,t.$$

Durch partielle Integration errechnet man:

$$\int (\cosh t)^2\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}[\sinh t \cdot \cosh t + t].$$

Für die Rücksubstitution $t = \operatorname{arsinh}(\frac{r}{k})$ benutzen wir:

$$\cosh\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{r}{k}\right)\right) = \sqrt{1+\left(\sinh\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{r}{k}\right)\right)\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{r}{k}\right)^2}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{k^2+r^2}\,\mathrm{d}\,r &= \frac{1}{2}k^2\left[\frac{r}{k}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{r}{k}\right)^2}+\operatorname{arsinh}\left(\frac{r}{k}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[r\cdot\sqrt{k^2+r^2}+k^2\operatorname{arsinh}\left(\frac{r}{k}\right)\right].\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned}F(S) &= 2\pi\int_0^1 \sqrt{k^2+r^2}\,\mathrm{d}\,r\\ &= \pi\left[r\cdot\sqrt{k^2+r^2}+k^2\operatorname{arsinh}\left(\frac{r}{k}\right)\right]_0^1\\ &= \pi\left(\sqrt{1+k^2}+k^2\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{k}\right)\right).\end{aligned}$$

2.1.7. Beispiel (Graphen von Funktionen).

Es sei $D \subsetneq \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\overline{J} \subsetneq D$ wie in 2.1.3. Durch $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

wird dann der Graph von f als Fläche im $\mathbb{R}^3$ parametrisiert. Es gilt

$$\Phi_x(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x,y) \end{pmatrix}; \quad \Phi_y(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x,y) \end{pmatrix};$$

$$\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y) = \begin{pmatrix} -f_x(x,y) \\ -f_y(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$|\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y)| = \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2} \neq 0.$$

Damit ergibt sich für die Flächeninhalt des Graphen $S = \Phi(\overline{J})$ von f, eingeschränkt auf $\overline{J}$:

$$F(S) = \int\int_{\overline{J}} \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y.$$

2.1.8. Beispiel (Mantelfläche eines Rotationskörpers).

Wie in 1.3.6 betrachten wir eine stetige Funktion $r : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $r(x) \geqq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Wir wollen den Inhalt der Mantelfläche M des Körpers bestimmen, der bei Rotation des Graphen von r um die x-Achse entsteht. Diese Fläche wird parametrisiert durch:

$$\Phi : [a,b] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 : (x,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ r(x) \cdot \cos\varphi \\ r(x) \cdot \sin\varphi \end{pmatrix},$$

und wir erhalten:

$$\Phi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ r'(x) \cdot \cos\varphi \\ r'(x) \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}; \quad \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -r(x) \cdot \sin\varphi \\ r(x) \cdot \cos\varphi \end{pmatrix};$$

$$\Phi_x \times \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} r(x) \cdot r'(x)((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2) \\ -r(x) \cdot \cos\varphi \\ -r(x) \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} = r(x) \begin{pmatrix} r'(x) \\ -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Mit

$$|\Phi_x \times \Phi_\varphi| = r(x)\sqrt{1 + (r'(x))^2}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} M &= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} r(x)\sqrt{1 + (r'(x))^2}\,\mathrm{d}\,\varphi \right) \mathrm{d}\,x \\ &= 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + (r'(x))^2}\,\mathrm{d}\,x. \end{aligned}$$

2.1.9. Definition.

Wie in 2.1.3 sei $S = \Phi(\overline{J})$ das Flächenstück, das durch den Abschluss $\overline{J} \subsetneqq D \subseteq \mathbb{R}^2$ des Innengebietes einer stückweise glatten regulären einfachen geschlossenen Kurve $K \subsetneqq D$ vermöge $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ parametrisiert wird. Ferner sei $h : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Das Flächenintegral von h über S ist definiert als

$$\int\int_S h\,\mathrm{d}\,O = \int\int_{\overline{J}} h(\Phi(u,v))|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)|\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

Der Ausdruck $\mathrm{d}\,O = |\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)|\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v$ wird auch als skalares Oberflächenelement bezeichnet.

2.1.10. Bemerkungen.

1. Das Flächenintegral ist das zweidimensionale Analogon des Kurvenintegrals reellwertiger Funktionen; vgl. A 5.4.1.
2. Das Flächenintegral über die konstante Funktion $h = 1$ liefert gerade den Flächeninhalt von S; vgl. 2.1.3.
3. Das Flächintegral hängt nicht von der Parametrisierung der Fläche ab.

2.1.11. Beispiel.

Es sei $\overline{J} = [0,1] \times [-3,3]$, $f : \overline{J} \to \mathbb{R}: (x,y) \mapsto x^2 + y$ und S sei der Graph von f. Gesucht ist das Flächenintegral

$$\iint_S x \,\mathrm{d}\, O,$$

also $h(x,y,z) = x$. Mit $f_x = 2x$ und $f_y = 1$ ergibt 2.1.7

$$\begin{aligned}\iint_S x \,\mathrm{d}\, O, \quad &= \iint_{[0,1]\times[-3,3]} x \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 1}\,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-3}^3 x \cdot \sqrt{2 + 4x^2}\,\mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, x.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution $u = 2 + 4x^2$ rechnet man nach, dass gilt

$$\iint_S x \,\mathrm{d}\, O = 3\sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

2.2. Der Integralsatz von Stokes

Wie in 2.1.3 sei $S = \Phi(\overline{J})$ das Flächenstück, das durch den Abschluss $\overline{J} \subsetneqq D \subseteq \mathbb{R}^2$ des Innengebietes einer stückweise glatten regulären einfachen geschlossenen Kurve $K \subsetneqq D$ vermöge $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ parametrisiert wird. Ferner sei $C : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine stückweise glatte reguläre positiv orientierte Parametrisierung der Kurve K. Dann ist

$$\Phi \circ C : [a, b] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \Phi(C(t))$$

eine Parametrisierung der Randkurve $\Phi(K)$ von S. Als Einheitsnormalenvektor auf S im Punkte $\Phi(u, v)$ verwenden wir:

$$n(u, v) = \frac{\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)}{|\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)|}$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $S \subsetneqq U$ und sei $g : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Gemäß A.5.2.3 ist die Rotation von g das durch

$$\operatorname{rot} g : U \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

definierte Vektorfeld.

2.2.1. Satz von Stokes.

Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

$$\int_{\Phi(K)} g(s) \cdot \mathrm{d}\, s = \int\int_S (\operatorname{rot} g) \cdot n \,\mathrm{d}\, O$$

2.2.2. Erläuterungen.

1. Links steht das Kurvenintegral des Vektorfeldes g längs der Kurve $\Phi(K) \subsetneqq \mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung $\Phi \circ C$

$$\int_{\Phi(K)} g(s) \cdot \mathrm{d}\, s = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(\Phi(C(t))) \cdot (\Phi \circ C)'(t)\, \mathrm{d}\, t.$$

   Das ist die Zirkulation $Z(g, \Phi(K))$ von g längs der geschlossenen Kurve $\Phi(K)$; vgl. A 5.4.9.

2. Rechts steht steht das Flächenintegral

$$\begin{aligned} &\iint_S (\operatorname{rot} g) \cdot n \,\mathrm{d}\, O \\ &\quad = \int\int_{\overline{J}} (\operatorname{rot} g)(\Phi(u,v)) \cdot n(u,v) |\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)| \,\mathrm{d}\, u \,\mathrm{d}\, v \\ &\quad = \int\int_{\overline{J}} (\operatorname{rot} g)(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)) \,\mathrm{d}\, u \,\mathrm{d}\, v. \end{aligned}$$

2.2.3. Bemerkungen.

1. Der Satz von Stokes ist das dreidimensionale Analogon zum Satz von Green 1.5.2.
2. Gemäß L 3.11.2 und 3.11.3 ist das (orientierte) Volumen des von drei Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelkörpers (oder Spats) gegeben durch das Spatprodukt

$$x \cdot (y \times z) = \det(x, y, z).$$

   Daher lässt sich die rechte Seite von 2.2.1 auch schreiben als:

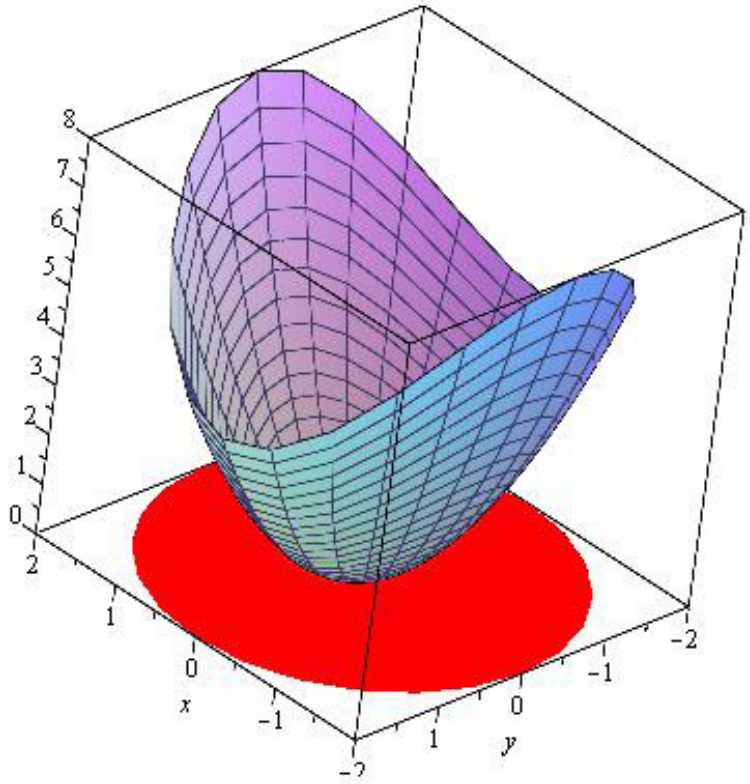
$$\int\int_{\overline{J}} \det((\operatorname{rot} g)(\Phi(u,v)), \Phi_u(u,v), \Phi_v(u,v)) \,\mathrm{d}\, u \,\mathrm{d}\, v.$$

2.2.4. Beispiel.

Wir betrachten das elliptische Paraboloid, das durch die Gleichung $z = f(x, y) = 2x^2 + y^2$ definiert ist, sowie den Bereich $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 4\}$ und seine Randkurve K. Das elliptische Paraboloid wird parametrisiert durch $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, 2x^2 + y^2)$. Gesucht ist die Zirkulation des Vektorfeldes $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1+z) \\ z(2+x) \\ x(y-1) \end{pmatrix}$$

längs der Kurve $\Phi(K)$. Die direkte Auswertung des Kurvenintegrals führt auf ein Integral über ein Polynom in sin und cos.



Für die Rotation von g gilt:

$$\operatorname{rot} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - (2+x) \\ y - (y-1) \\ z - (1+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Gemäß 2.1.7 gilt

$$\Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz von Stokes erhalten wir

$$\begin{aligned} Z(g, \Phi(K)) &= \iint_B \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \\ &= \iint_B (8x - 2y - 1) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y. \end{aligned}$$

Da B eine Kreisfläche ist, transformieren wir auf Polarkoordinaten, und erhalten mit 1.6.4

$$\begin{aligned} \iint_B (8x - 2y - 1) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (8r\cos\varphi - 2r\sin\varphi - 1) r \,\mathrm{d}\, \varphi \right) \mathrm{d}\, r \\ &= \int_0^2 \left[(8r\sin\varphi + 2r\cos\varphi - \varphi) r \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\, r \\ &= \int_0^2 -2\pi r \,\mathrm{d}\, r \\ &= \left[-\pi r^2 \right]_0^2 \\ &= -4\pi. \end{aligned}$$

2.2.5. Bemerkung.

Wenn g das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung ist, erlaubt der Satz von Stokes die folgende physikalische Deutung.
Die Zirkulation längs der geschlossenen Randkurve der Fläche S beschreibt den Teil der Flüssigkeit (Volumen pro Zeiteinheit), der an der Kurve entlangfließt; vgl. A 5.4.9. Die Rotation beschreibt die "Wirbelstärke" des Vektorfeldes g, und der Ausdruck $\operatorname{rot} g \cdot n$ beschreibt die Komponente der Wirbelstärke senkrecht zur Fläche nach außen. Der Satz von Stokes besagt dann, dass sich die Umströmung einer Fläche aus der Summation über die Wirbel in den Punkten der Fläche ergibt.

2.2.6. Erweiterung auf allgemeinere Situationen.

Viele Flächen im Raum lassen sich nicht durch ein einziges Flächenstück im Sinne von 2.1.1 beschreiben.
Man kann sie in Flächenstücke zerschneiden, und auf jedes den Satz von Stokes anwenden. Schnittlinien werden zweimal durchlaufen, und zwar in entgegengesetzter Richtung. Die zugehörigen Anteile der Kurvenintegrale heben sich weg, also gilt der Satz von Stokes für die ganze Fläche. Dabei werden die Kurvenintegrale über sämtliche Randkurven addiert, ebenso wie die Flächenintegrale über sämtliche Teilstücke der Fläche.
Die Randkurven müssen so orientiert werden, dass man beim Durchlaufen die Fläche links liegen lässt.

Wichtig ist die richtige Wahl des Einheitsnormalenfeldes n: In jedem Punkt der Fläche gibt es zwei Einheitsvektoren, die senkrecht auf der Fläche stehen; sie sind entgegengesetzt.
Richtige Wahl im Punkt einer Randkurve: Für den Geschwindigkeitsvektor v einer positiv orientierten Parametrisierung soll $n \times v$ ins Innere der Fläche weisen. Es genügt, dies an einem Punkt der Randkurve zu überprüfen; aus Stetigkeitsgründen ist n dadurch überall festgelegt.
Anschaulich kann man die Rechte-Hand-Regel benutzen: Wenn n in Richtung des Daumens weist und v in Richtung des Zeigefingers, dann weist der Mittelfinger ins Innere der Fläche.
Wenn man die Parametrisierung der Flächenstücke und ihrer Randkurven gemeinsam wählt, so wie wir es gemacht haben, dann passen die Orientierungen automatisch zusammen.

2.2.7. Geschlossene Flächen.

Eine Fläche $S \subsetneq \mathbb{R}^3$ heißt geschlossen, wenn sie keinen Rand hat. Beispiele sind die Oberfläche einer Kugel oder eines Fahrradschlauchs (eines sogenannten Torus).
Man kann S in Flächenstücke zerschneiden, und auf jedes den Satz von Stokes anwenden. Schnittkurven bekommen von jedem der Teilstücke eine andere Orientierung. In der Summe heben sich die Kurvenintegrale über Schnittkurven weg, also gilt

2.2.8. Satz.

Für eine geschlossene Fläche S im Definitionsbereich eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes g gilt stets

$$\int\int_S \operatorname{rot} g \cdot n \, \mathrm{d}\, O = 0.$$

(Dabei ist es gleichgültig, welches der beiden Einheitsnormalenfelder man für n nimmt.)

2.3. Integration über dreidimensionale Bereiche

Gebietsintegrale im $\mathbb{R}^3$ werden analog zu Gebietsintegralen im $\mathbb{R}^2$ definiert; vgl. 1.1.1. Alle Aussagen aus 1.1 und 1.2 übertragen sich unmittelbar, das gilt insbesondere für den Satz von Fubini 1.1.2.

2.3.1. Definition.

Es sei $D \subsetneq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich und $k, l : D \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen mit $k(x,y) \leqq l(x,y)$ für alle $(x,y) \in D$. Dann heißt

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, k(x,y) \leqq z \leqq l(x,y)\}$$

ein Normalbereich parallel (oder bezüglich) zur x-y-Ebene. Normalbereiche bzgl. der x-z- bzw. y-z-Ebene werden analog definiert.

Offenbar gibt es 6 Typen von Normalbereichen im $\mathbb{R}^3$.

2.3.2. Satz.

Es sei $B \subsetneq \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich bzgl. der x-y-Ebene, und es sei $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{k(x,y)}^{l(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Der Ausdruck $\int_{k(x,y)}^{l(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ hängt nicht von z ab, also haben wir das Problem auf eine 2-dimensionale Integration zurückgeführt. Der Satz gilt entsprechend auch für Normalbereiche bzgl. der x-z- oder y-z-Ebene.

2.3.3. Beispiel.

Wir betrachten den Bereich
$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \pi, 0 \leqq x \leqq y^2, 0 \leqq z \leqq y\}$ und die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$: $(x,y,z) \mapsto \cos\left(\frac{x}{y}\right)$. Gesucht ist $\int\int\int_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$. Die Menge B ist ein Normalbereich bzgl. der x-y-Ebene (oder auch bzgl. der y-z-Ebene). Also gilt:

$$\begin{aligned}
\int\int\int_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{y^2} \left(\int_0^{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right) \mathrm{d}\,z \right) \mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{y^2} \left[z \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right]_{z=0}^{z=y} \mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{y^2} y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right]_{x=0}^{x=y^2} \mathrm{d}\,y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y^2 \sin y \,\mathrm{d}\,y \\
&= \left[(2-y^2)\cos y + 2y \sin y \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \pi^2 - \pi - 2.
\end{aligned}$$

Die Definition von Koordinatentransformationen 1.6.1 und die Transformationsformel 1.6.2 übertragen sich direkt ins 3-dimensionale; die Jacobimatrix ist dann dreireihig.

2.3.4. Beispiel (Zylinderkoordinaten).

Zylinderkoordinaten sind Polarkoordinaten (vgl. 1.6.4) in der x-y-Ebene; die z-Koordinate bleibt ungeändert. Wir setzen also $P = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$ und $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geqq 0\}$, und betrachten die Transformation:

$$\zeta : P \times \mathbb{R} \to Q \times \mathbb{R}\colon (r, \varphi, z) \mapsto (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi, z).$$

Für die Funktionaldeterminante ergibt sich:

$$\det J\zeta(r, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Für einen Bereich $B \subsetneqq P \times \mathbb{R}$, sein Bild $D = \zeta(B) \subsetneqq Q \times \mathbb{R}$ und eine integrierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gilt also:

$$\iiint_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iiint_B f(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi, z) \cdot r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,z.$$

2.3.5. Beispiel (Kugelkoordinaten).

Kugelkoordinaten liefern eine Parametrisierung von $\mathbb{R}^3$ durch den Abstand vom Nullpunkt sowie den (mathematischen) Längen- und Breitengrad; vgl. 2.1.2. Man erhält sie, indem man zunächst den Äquator der Kugel vom Radius $r > 0$ durch den Längengrad $\varphi \in [0, 2\pi)$ parametrisiert, und anschließend den zugehörigen Längenkreis durch den gegen die positive z-Achse gemessenen Breitengrad $\vartheta \in [0, \pi]$. Um die Eindeutigkeit der Parametrisierung und ihre Differenzierbarkeit zu erzwingen, entfernen wir die Randpunkte und erhalten nur eine Parametrisierung von $\mathbb{R}^3$ ohne die Halbebene $y = 0, x \geqq 0$. Wir setzen also:

$$\begin{aligned} P &= \{(r, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi\}, \\ Q &= \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geqq 0\}, \end{aligned}$$

und definieren $\kappa : P \to Q$ durch:

$$\kappa(r,\varphi,\vartheta) = \cos\vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} + \sin\vartheta \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Für die Jacobimatrix ergibt sich

$$J\kappa(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

und für die Funktionaldeterminante

$$\det J\kappa(r,\varphi,\vartheta) = -r^2\sin\vartheta.$$

Für einen Bereich $B \subsetneqq P$, sein Bild $D = \kappa(B) \subsetneqq Q$ und eine integrierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gilt also:

$$\begin{aligned} \iiint_D & f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z \\ &= \iiint_B f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\cdot r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\vartheta. \end{aligned}$$

2.3.6. Beispiel (Schwerpunkt einer Halbkugel).

Wir betrachten die Halbkugel

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqq R^2, z \geqq 0\}$$

vom Radius $R > 0$. Gemäß 1.3.7 ist das Volumen von B gegeben durch $V = V(B) = \frac{2}{3}\pi R^3$. Die x-Koordinate des Schwerpunktes von B berechnet man nach der Formel

$$x_s(B) = \frac{1}{V(B)} \iiint_B x\cdot \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z.$$

Für die y- und die z-Koordinate des Schwerpunktes gelten analoge Formeln.
Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt von B auf der z-Achse, d.h. es gilt $x_s(B) = y_s(B) = 0$.
Mit der Kugelkoordinatenabbildung κ gilt

$$B = \kappa\left([0,R]\times[0,2\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right),$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}
\iiint_B z \cdot \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \iiint_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r\cos\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\vartheta \\
&= \int_0^R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi \right) \mathrm{d}\,\vartheta \right) \mathrm{d}\,r \\
&= \int_0^R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\pi r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \right) \mathrm{d}\,\vartheta \right) \mathrm{d}\,r \\
&= \int_0^R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi r^3 \sin(2\vartheta)\,\mathrm{d}\,\vartheta \right) \mathrm{d}\,r \\
&= \int_0^R \left(\left[-\frac{1}{2}\pi r^3 \cos(2\vartheta) \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \right) \mathrm{d}\,r \\
&= \int_0^R \left(\pi r^3 \right) \mathrm{d}\,r = \left[\frac{1}{4}\pi r^4 \right]_0^R = \frac{1}{4}\pi R^4.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$z_s(B) = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8}R.$$

2.4. Der Integralsatz von Gauß

Wir betrachten eine geschlossene Fläche S (vgl. 2.2.7) im Raum. Diese berandet eine beschränkte offene Menge $V \subsetneqq \mathbb{R}^3$, so dass $\overline{V} = V \cup S$ kompakt ist. Man nennt V auch das Innengebiet von S.
Für jeden Punkt $p \in S$ sei $n(p) \in \mathbb{R}^3$ der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor in p auf S.

2.4.1. Definition.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge mit $\overline{V} \subsetneqq U$, und sei $g : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Der Ausfluss des Vektorfeldes g durch die geschlossene Fläche S ist definiert durch:

$$A(g,S) = \iint_S g \cdot n\,\mathrm{d}\,O.$$

Gemäß A 5.2.1 heißt $\operatorname{div} g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}$$

die Divergenz von g.

2.4.2. Integralsatz von Gauß.

Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

$$A(g, S) = \int\int_S g \cdot n \, \mathrm{d}\, O = \int\int\int_{\overline{V}} \operatorname{div} g \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \, \mathrm{d}\, z.$$

2.4.3. Erläuterungen.

1. Zur Berechnung des links stehenden Flächenintegrals von $g \cdot n$ über S zerlegt man die geschlossene Fläche S in Flächenstücke, bildet die Flächenintegrale über diese gemäß 2.1.9 und summiert.
2. Rechts steht das Gebietsintegral einer Funktion über $\overline{V}$. Zur Berechnung kann man $\overline{V}$ in Normalbereiche zerlegen.

2.4.4. Bemerkung.

Wenn g das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung ist, ergibt sich folgende physikalische Deutung des Satzes von Gauß.
Die Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zur Fläche nach außen ist gegeben durch $g \cdot n$; multipliziert mit einem kleinen Flächenstückchen von S ergibt sich die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch dieses Stückchen fließt. Integration über S ergibt die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche S nach außen strömt.
Der Satz von Gauß besagt, dass diese Menge gleich der Flüssigkeitsmenge ist, die im Inneren von S, also im Bereich $\overline{V}$, erzeugt wird. Die Divergenz beschreibt dabei die Quelldichte von g.

Ein Vektorfeld g heißt quellenfrei, falls seine Divergenz gleich Null ist; analog heißt g wirbelfrei, wenn seine Rotation gleich Null ist; vgl. A 5.2.5. Als unmittelbare Folgerung aus den Sätzen von Gauß und Stokes ergibt sich.

2.4.5. Satz.

- *Für ein quellenfreies Feld g gilt $A(g, S) = 0$ für jede geschlossene Fläche S im Definitionsbereich von g.*
- *Für ein wirbelfreies Feld g gilt $Z(g, K) = 0$ für jede geschlossene Kurve K im Definitionsbereich von g.*

2.4.6. Bemerkungen.

1. Gemäß A 5.2.8 gilt $\operatorname{div}\operatorname{rot} g = 0$ für jedes 2 mal differenzierbare Vektorfeld g.
   Umgekehrt kann man zeigen, dass sich jedes quellenfreie Vektorfeld g auf einem konvexen Gebiet als Rotation eines anderen Vektorfeldes h schreiben lässt; dabei heißt ein Gebiet konvex, wenn es mit je zwei Punkten auch die ganze Vebindungsstrecke enthält, vgl. A 4.4.6. Man bezeichnet h dann als Vektorpotential von g.
2. Gemäß A 5.2.4 lässt sich jedes wirbelfreie Feld auf einem konvexen Gebiet als Gradient einer (skalaren) Potentialfunktion schreiben.
3. Der Satz von Helmholtz besagt, dass sich jedes 2 mal differenzierbare Vektorfeld g auf einem konvexen Gebiet als Summe aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektorfeld schreiben lässt; $g = \operatorname{rot} h + \operatorname{grad} U$.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1.1. Definition.

Gegeben sei eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ und eine Funktion $G : E \to \mathbb{R}$. Weiterhin sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Man sagt, die n-fach differenzierbare Funktion

$$f : I \to \mathbb{R}$$

löst die (gewöhnliche) Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$G(x, y, y', y'', y^{(3)} \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

wenn für alle $x \in I$ gilt

$$(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)) \in E$$

und

$$G(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

3.1.2. Bemerkungen.

1. Die Differentialgleichung ist also erfüllt, wenn man $f^{(k)}(x)$ statt $y^{(k)}$ in G einsetzt.
2. Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ableitungsordnung.
3. "Gewöhnlich" bedeutet, dass nur gewöhnliche (und keine partiellen) Ableitungen vorkommen. Andernfalls spricht man von partiellen Differentialgleichungen.

Eine Differentialgleichung stellt einen Zusammenhang zwischen einer Funktion und einigen ihrer Ableitungen her. Es kommt in Technik und Naturwissenschaften oft vor, dass man von einer gesuchten variablen Größe nur diesen Zusammenhang kennt und versucht, sie daraus zu bestimmen.
Es ergeben sich folgende Fragen:

1. Besitzt jede Differentialgleichung eine Lösung?
2. Falls ja, wieviele Lösungen gibt es?
3. Falls es mehrere Lösungen gibt, wie kann man durch Zusatzbedingungen die Eindeutigkeit erzwingen?
4. Wie findet man die Lösungen einer Differentialgleichung?

3.1.3. Beispiel (Das Newtonsche Abkühlungsgesetz).

Nach diesem Gesetz ist die Temperaturänderung eines Körpers proportional zur Differenz zwischen der Temperatur des Körpers und der Umgebungstemperatur. Wenn wir die Temperatur des Körpers mit T bezeichnen, und die Umgebungstemperatur mit U gilt also:

$$T'(t) = k(T(t) - U);$$

dabei ist t die Zeit und $k < 0$ eine Materialkonstante. Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

$$n = 1, E = \mathbb{R}^3, G(x_1, x_2, x_3) = x_3 - k(x_2 - U).$$

Wenn die Umgebungstemperatur U konstant ist sagt die physikalische Intuition, dass der Abkühlvorgang nur von der Ausgangstemperatur $T(t_0)$ zu einem vorgegebenen Zeitpunkt t_0 abhängt.

3.1.4. Definition.

Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung heißt explizit, wenn die Funktion G nach $y^{(n)}$ aufgelöst werden kann; wenn man also schreiben kann.

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

mit einer geeigneten Funktion g von $n+1$ Variablen.

3.1.5. Definition.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $g : D \to \mathbb{R}$ stetig und $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D$. Dann heißt

$$\begin{aligned} &y^{(n)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}); \\ &y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

ein Anfangswertproblem.

Eine n-mal differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung des Anfangswertproblems, wenn gilt

- $f^{(n)}(x) = g(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))$ für alle $x \in I$;
- $x_0 \in I$;
- $f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y_1, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

3.1.6. Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $g : D \to \mathbb{R}$ stetig.

1. (Peano) Für jedes $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D$ gibt es ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so dass das Anfangswertproblem eine Lösung $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt.
2. (Picard-Lindelöf) Wenn g zusätzlich stetig partiell nach den letzten n Variablen $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ differenzierbar ist, dann ist die Lösung eindeutig bestimmt.

3.1.7. Beispiele.

1. Beim Newtonschen Abkühlungsgesetz 3.1.3 gilt $g(x, y) = k(y - U)$, also ist g stetig partiell nach y differenzierbar und jedes Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar; das entspricht der physikalischen Intuition.
2. Bei dem Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{|y|}; \quad y(0) = 0$$

ist die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \sqrt{|y|}$ für $y = 0$ nicht partiell nach y differenzierbar. Eine Lösung des Anfangswertproblems ist durch $f(x) = 0$ gegeben. Eine andere Lösung ist

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{für } x \geqq 0. \end{cases}$$

Also ist das Anfangswertproblem nicht eindeutig lösbar.

3.2.1. Definition.

Seien $J, K \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $g : J \to \mathbb{R}, h : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Die in 3.1.7 betrachteten Beispiele sind von dieser Art.

3.2.2. Satz.

Die Voraussetzungen von 3.2.1 seien erfüllt und es sei $h(t) \neq 0$ *für alle* $t \in K$. *Für* $x_0 \in J$ *und* $y_0 \in K$ *definieren wir* $G : J \to \mathbb{R}$ *und* $H : K \to \mathbb{R}$ *durch*

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}\,t; \quad H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(t)}\,\mathrm{d}\,t.$$

Sei $I \subseteq J$ *ein Intervall mit* $G(I) \subseteq H(K)$. *Dann existiert genau eine Lösung* $f : I \to \mathbb{R}$ *des Anfangswertproblems*

$$y' = g(x) \cdot h(y); \quad y(x_0) = y_0.$$

Diese Lösung ist gegeben durch

$$f(x) = H^{-1}(G(x)) \quad \text{für } x \in I.$$

3.2.3. Erläuterungen.

1. Da $h(t) \neq 0$ für alle $t \in K$ gilt, kann h auf dem Intervall K nicht das Vorzeichen wechseln (nach dem Zwischenwertsatz A 1.13.6). Also ist H auf K streng monoton wachsend oder fallend, vgl. A 2.4.8, und es existiert die Umkehrfunktion H^{-1}.
2. G ist diejenige Stammfunktion von g, die $G(x_0) = 0$ erfüllt, und H ist diejenige Stammfunktion von $\frac{1}{h}$, die $H(y_0) = 0$ erfüllt. Insbesondere gilt $G(x_0) = H(y_0)(= 0)$, und da G und H stetig sind, gibt es stets ein Intervall $I \subseteq J$ mit $G(I) \subseteq H(K)$.
3. Häufig lässt sich H^{-1} nicht explizit ausrechnen. In diesem Fall akzeptiert man die Gleichung $H(y) = H(f(x)) = G(x)$ als Lösung in impliziter Form.
4. Falls $h(y_0) = 0$ gilt, löst die konstante Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = y_0$ das Anfangswertproblem, da $f'(x) = 0 = g(x) \cdot h(y_0) = g(x) \cdot h(f(x))$ für alle $x \in J$.

3.2.4. Bemerkung.

In der Praxis werden die Funktionen G und H unterdrückt, und man rechnet folgendermaßen: Aus

$$y' = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = g(x) \cdot h(y)$$

folgt

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{h(y)} = g(x)\, \mathrm{d}\, x.$$

Integration auf beiden Seiten ergibt:

$$\int \frac{\mathrm{d}\, y}{h(y)} = \int g(x)\, \mathrm{d}\, x + c.$$

Die entstehende Gleichung löst man wenn möglich nach y auf und bestimmt c so, dass die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt ist.

3.2.5. Beispiel.

Das Newtonsche Abkühlungsgesetz $T' = \frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,t} = k(T - U)$ führt auf

$$\frac{\mathrm{d}\,T}{T - U} = k\,\mathrm{d}\,t$$

falls $T \neq U$. Integration auf beiden Seiten liefert:

$$\ln|T - U| = kt + c$$

bzw.

$$|T - U| = e^c \cdot e^{kt}.$$

Jetzt muss man die Anfangswerte berücksichtigen und erhält:

$$\begin{aligned} T(t) &= U + e^c \cdot e^{kt} \quad \text{falls } T_0 = T(t_0) > U \\ T(t) &= U - e^c \cdot e^{kt} \quad \text{falls } T_0 = T(t_0) < U. \end{aligned}$$

Die konstante Funktion $T(t) = U$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist ebenfalls eine Lösung. Man kann alle Lösungen zusammenfassen zu

$$T(t) = U + C \cdot e^{kt}$$

mit einer Konstante $C \in \mathbb{R}$. Die Konstante kann man aus der Anfangsbedingung

$$T_0 = T(t_0) = U + C \cdot e^{kt_0}$$

als

$$C = (T_0 - U)e^{-kt_0}$$

bestimmen.
Jede Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, physikalisch ist die Lösung jedoch nur auf dem Intervall $[t_0, \infty)$ von Interesse.
Eine Kurvendiskussion zeigt, dass die Lösung für $T_0 > U$ streng monoton fällt und für $T_0 < U$ streng monoton wächst. Für $t \to \infty$ streben alle Lösungen gegen den Grenzwert U. Dieses Verhalten entspricht der physikalischen Intuition.

3.2.6. Beispiel.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0, \quad y(x_0) = y_0,$$

also $g(x) = -x$ und $h(y) = \frac{1}{y}$.
Integration gemäß 3.2.2 liefert

$$\int_{y_0}^{y} t \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y_0^2 = \int_{x_0}^{x} -t \,\mathrm{d}\, t = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_0^2$$

Also ist die Lösung gegeben durch

$$y = f(x) = \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2}$$

Das Vorzeichen muss man entprechend dem Vorzeichen von y_0 wählen, und das maximale Definitionsintervall ist $I = (-\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$.

In der Praxis rechnet man folgendermaßen: Zunächst wird die Differentialgleichung umgeformt zu

$$y \cdot y' = y\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = -x \quad \text{bzw.} \quad y \,\mathrm{d}\, y = -x \,\mathrm{d}\, x,$$

Integration auf beiden Seiten ergibt

$$\int y \,\mathrm{d}\, y = \frac{1}{2}y^2 = \int -x \,\mathrm{d}\, x = -\frac{1}{2}x^2 + c,$$

und durch Auflösen nach y erhält man

$$y = f(x) = \pm\sqrt{2c - x^2}.$$

Die Konstante c ermittelt man durch Einsetzen der Anfangsbedingung

$$y_0 = f(x_0) = \pm\sqrt{2c - x_0^2},$$

als

$$2c = y_0^2 + x_0^2.$$

3.3.1. Definition.

Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist eine Differentialgleichung der Form

$$y' + g(x) \cdot y = h(x),$$

wobei $g, h : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ sind. Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist die Differentialgleichung

$$y' + g(x) \cdot y = 0.$$

Wenn man die homogene Gleichung in der Form $y' = -g(x) \cdot y$ schreibt, sieht man, dass es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen wie in 3.2.1 handelt. Wenn man sie nach der Methode von 3.2.2 löst, ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{y} = -g(x)\, \mathrm{d}\, x$$

für $y \neq 0$ und damit

$$\ln|y| = \int \frac{\mathrm{d}\, y}{y} = -\int g(x)\, \mathrm{d}\, x + c = -G(x) + c,$$

dabei ist G eine feste Stammfunktion von g.
Die Einschränkung des natürlichen Logarithmus auf jedes der Intervalle $(-\infty, 0)$ oder $(0, \infty)$ liefert eine Bijektion dieses Intervalls auf die reellen Zahlen. Daher erhalten wir die Lösungen

$$y = f(x) = \pm e^{c} e^{-G(x)},$$

die auf dem ganzen Intervall J definiert sind.

Die konstante Funktion $f(x) = 0$ für alle $x \in J$ ist ebenfalls eine Lösung. Zusammengefasst ergibt sich

3.3.2. Satz.

Die Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' + g(x)y = 0$$

sind genau die Funktionen

$$f(x) = Ce^{-G(x)}$$

mit einer festen Stammfunktion G von g und einer Konstante $C \in \mathbb{R}$. Jede Lösung ist auf dem ganzen Intervall J definiert. Die Konstante C ergibt sich aus der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ als

$$C = y_0 e^{G(x_0)}.$$

3.3.3. Beispiele.

1. Die Differentialgleichung
$$y' = y$$
hat für jede Wahl von $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung f mit $f(x_0) = y_0$, nämlich
$$f(x) = y_0 e^{x - x_0}.$$
Das ist ein Spezialfall von 3.3.2 mit $g(x) = -1, G(x) = -x$.
2. Die lineare Differentialgleichung
$$y' = \frac{4}{x} y, \quad x \neq 0,$$
hat die allgemeine Lösung
$$y = f(x) = Ce^{4 \ln |x|} = C|x|^4.$$
Maximale Definitionsintervalle sind $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$.

3.3.4. Die inhomogene Gleichung.

Wir betrachten zwei Lösungen f_1, f_2 der inhomogenen Differentialgleichung

$$y' + g(x) \cdot y = h(x),$$

es gilt also

$$f_i'(x) + g(x) \cdot f_i(x) = h(x)$$

für $i = 1, 2$. Für die Differenz ergibt sich

$$f_1'(x) + g(x) \cdot f_1(x) - f_2'(x) - g(x) \cdot f_2(x) = h(x) - h(x) = 0,$$

und damit

$$f_1'(x) - f_2'(x) + g(x) \cdot (f_1(x) - f_2(x)) = 0.$$

Also löst $f_1 - f_2$ die zugehörige homogene Gleichung.
Umgekehrt sieht man ein, dass wenn f die homogene Gleichung löst und f_p die inhomogene, dann löst $f + f_p$ ebenfalls die inhomogene.

3.3.5. Satz.

Es sei f_p eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' + g(x) \cdot y = h(x),$$

dann besteht die Gesamtheit der Lösungen genau aus den Funktionen

$$f_p + f,$$

wobei f irgendeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist.

3.3.6. Bemerkungen.

1. Statt "spezieller Lösung" sagt man auch (etwas altmodisch) "partikuläre Lösung".
2. Das Ergebnis von 3.3.5 wird oft folgendermaßen formuliert:
   Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich, in dem man zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung addiert.
3. Lineare Differentialgleichungen verhalten sich, was das Lösungsverhalten angeht, genau wie Lineare Gleichungssysteme, vgl. L 3.5.4; daher der Name.
   Entscheidend ist, dass y und y' linear in die Differentialgleichung eingehen.

3.3.7. Variation der Konstanten.

Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung 3.3.2 macht man den Ansatz

$$f_p(x) = k(x) \cdot e^{-G(x)},$$

und versucht, $k(x)$ so zu bestimmen, dass f_p die inhomogene Gleichung löst.

$$\begin{aligned} h(x) &= f_p'(x) + g(x) \cdot f_p(x) \\ &= (k(x) \cdot e^{-G(x)})' + g(x) \cdot (k(x) \cdot e^{-G(x)}) \\ &= k'(x)e^{-G(x)} - k(x)G'(x)e^{-G(x)} + g(x) \cdot k(x)e^{-G(x)} \\ &= k'(x)e^{-G(x)} \end{aligned}$$

weil $G'(x) = g(x)$. Es ergibt sich $k'(x) = h(x)e^{G(x)}$, also wählt man für $k(x)$ eine Stammfunktion von $h(x)e^{G(x)}$.

3.3.8. Satz.

Die Lösungen der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + g(x)y = h(x)$$

sind genau die Funktionen

$$y = f(x) = k(x)e^{-G(x)} + Ce^{-G(x)},$$

wobei

- G *feste Stammfunktion von* g,
- k *feste Stammfunktion von* $x \mapsto h(x)e^{G(x)}$,
- $C \in \mathbb{R}$.

Jede dieser Lösungen ist auf dem gesamten Definitionsintervall J *von* g *und* h *definiert.*

3.3.9. Zusatz.

Für jede Wahl von $x_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}$ hat das Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ genau eine Lösung. Das zugehörige C berechnet sich als

$$C = y_0 e^{G(x_0)} - k(x_0).$$

Wählt man die Stammfunktionen so, dass $G(x_0) = k(x_0) = 0$, dann wird die Berechnung von C besonders einfach:

$$C = y_0.$$

3.3.10. Beispiel.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' + x^2 y = x^5.$$

Es gilt also $g(x) = x^2$ und $h(x) = x^5$. Eine Stammfunktion von g ist $G(x) = \frac{1}{3}x^3$. Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$f(x) = Ce^{-\frac{1}{3}x^3}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Variation der Konstanten liefert

$$k'(x) = h(x)e^{G(x)} = x^5 e^{\frac{1}{3}x^3}.$$

Zur Bestimmung einer Stammfunktion schreiben wir

$$\begin{aligned}
\int x^5 e^{\frac{1}{3}x^3} \,\mathrm{d}\, x &= \int x^3 \cdot x^2 e^{\frac{1}{3}x^3} \,\mathrm{d}\, x \\
&= x^3 \cdot e^{\frac{1}{3}x^3} - \int 3x^2 \cdot e^{\frac{1}{3}x^3} \,\mathrm{d}\, x \\
&= x^3 \cdot e^{\frac{1}{3}x^3} - 3e^{\frac{1}{3}x^3} \\
&= (x^3 - 3)e^{\frac{1}{3}x^3}
\end{aligned}$$

Also ist

$$f_p(x) = k(x)e^{-G(x)} = (x^3 - 3)e^{\frac{1}{3}x^3} e^{-\frac{1}{3}x^3} = (x^3 - 3)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit erhalten wir für die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$f(x) = x^3 - 3 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3}, \ C \in \mathbb{R}.$$

4. Homogene lineare Differentialgleichungen

4.1. Grundbegriffe

4.1.1. Definition.

Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, \ldots, a_{n-1} : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.

4.1.2. Bemerkungen.

1. Der Fall $n = 1$ wurde bereits in 3.3.2 behandelt.
2. Wenn man die Differentialgleichung explizit schreibt als

$$y^{(n)} = -a_0(x)y - a_1(x)y' - \cdots - a_{n-1}(x)y^{(n-1)},$$

   sieht man sofort, dass die rechte Seite stetig partiell nach $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Also ist nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz 3.1.6 jedes Anfangswertproblem eindeutig lösbar.
3. Man kann zeigen, dass sich jede Lösung auf dem ganzen Intervall J definieren lässt.

4.1.3. Erinnerung.

Gemäß A 2.2.16 bilden die n-mal stetig differenzierbaren Funktionen von J nach $\mathbb{R}$ einen reellen Vektorraum, der mit $C^n(J)$ bezeichnet wird; d.h. für je zwei C^n-Funktionen $f, g : J \to \mathbb{R}$ und jede relle Zahl $c \in \mathbb{R}$ sind $f + g$ und cf ebenfalls C^n-Funktionen.
Der Differentialoperator $D : C^n(J) \to C^{n-1}(J)$, der einer Funktion ihre Ableitung zuordnet, also $D(f) = f'$, ist eine lineare Abbildung zwischen diesen beiden Vektorräumen; d.h. für je zwei C^n-Funktionen f, g und jede relle Zahl $c \in \mathbb{R}$ gilt
$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = Df + Dg$ und
$D(cf) = (cf)' = cf' = cD(f)$.
Wegen dieses Sachverhaltes erweist es sich als zweckmäßig, bei der Behandlung linearer Differentialgleichungen die Sprache der linearen Algebra zu benutzen.

4.1.4. Satz.

Die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung bilden einen n-dimensionalen Untervektorraum von $C^n(J)$.
Jede Basis dieses Vektorraums heißt ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Wenn also $f_1, \ldots, f_n$ ein Fundamentalsystem bilden, lässt sich jede Lösung der Differentialgleichung eindeutig als $c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$ mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ schreiben.

Beweis.

Nach dem Unterraumkriterium L 2.4.4 müssen wir zeigen, dass für je zwei Lösungen f, g unserer Differentialgleichung und für jeden Skalar $c \in \mathbb{R}$ die Funktionen $f + g$ und cf ebenfalls Lösungen sind.
Dies folgt sofort aus der Linearität des Differentialoperators, es gilt ja

$$(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)} \quad \text{und} \quad (cf)^{(k)} = cf^{(k)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}(f+g)^{(n)} + a_{n-1}(x)(f+g)^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)(f+g) \\ = f^{(n)} + a_{n-1}(x)f^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)f \\ + g^{(n)} + a_{n-1}(x)g^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)g = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Also löst auch $f + g$ die Differentialgleichung. Für cf kann man ein analoges Argument benutzen.
Damit ist die Menge der Lösungen als Vektorraum erkannt.

Um zu zeigen, dass der Lösungsraum n-dimensional ist, reicht es nach L 2.8.13 eine Basis aus genau n Elementen anzugeben.
Wir wählen einen festen Punkt $x_0 \in J$. Es seien $f_0, \ldots, f_{n-1}$ die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

$$f_j^{(k)}(x_0) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \neq k \\ 1 & \text{falls } j = k \end{cases}$$

für $j, k = 0, \ldots, n-1$. Wir wollen zeigen, dass diese Funktionen ein Fundamentalsystem bilden. Gemäß L 2.8.1 müssen wir dazu zeigen, dass $f_0, \ldots, f_{n-1}$

- linear unabhängig sind;
- den ganzen Lösungsraum erzeugen.

Zur linearen Unabhängigkeit:
Seien $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit $c_0 f_0 + \cdots + c_{n-1} f_{n-1} = 0$. Wir müssen zeigen, dass dann $c_0 = \cdots = c_{n-1} = 0$ gilt.
Auswerten an der Stelle x_0 liefert

$$0 = c_0 f_0(x_0) + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}(x_0) = c_0.$$

Durch k-maliges Differenzieren und Auswerten an der Stelle x_0 erhalten wir analog

$$0 = c_0 f_0^{(k)}(x_0) + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}^{(k)}(x_0) = c_k$$

für $k = 1, \ldots, n-1$. Damit sind $f_0, \ldots, f_{n-1}$ als linear unabhängig erkannt.

Zur Erzeugung:
Es sei f irgendeine Lösung der Differentialgleichung. Wir müssen zeigen, dass sich f als Linearkombination von $f_0, \ldots, f_{n-1}$ schreiben lässt.
Dazu setzen wir $c_k = f^{(k)}(x_0)$ und betrachten die Funktion $g = c_0 f_0 + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}$. Diese Funktion löst ebenfalls die Differentialgleichung, und es gilt

$$g^{(k)}(x_0) = c_0 f_0^{(k)}(x_0) + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}^{(k)}(x_0) = c_k.$$

für $k = 0, \ldots, n-1$. Also lösen f und g dasselbe Anfangswertproblem, und wegen der Eindeutigkeit der Lösung sind sie gleich, es gilt also

$$f = g = c_0 f_0 + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}.$$

Damit ist $f_0, \ldots, f_{n-1}$ als Fundamentalsystem erkannt.

4.2. Die Wronski-Matrix

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie man einem gegebenen System von n Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung ansieht, ob sie ein Fundamentalsystem bilden. Mit Hilfe der Wronski-Matrix kann man dieses Problem im unendlich-dimensionalen Vektorraum $C^n(J)$ auf das entsprechende Problem im n-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ zurückführen.

4.2.1. Definition.

Es seien $f_1, \ldots, f_n$ Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

und $x_0 \in J$. Dann heißt

$$M(x_0) = \begin{pmatrix} f_1(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

die Wronski-Matrix von $f_1, \ldots, f_n$ an der Stelle x_0, und

$$W(x_0) = \det M(x_0)$$

heißt die Wronski-Determinante.

4.2.2. Satz.

Es seien $f_1, \ldots, f_n$ Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

und $x_0 \in J$. Dann bilden $f_1, \ldots, f_n$ genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die Wronski-Matrix $M(x_0)$ regulär ist, oder äquivalent wenn für die Wronski-Determinante gilt $W(x_0) \neq 0$. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

gegeben durch $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$, mit

$$M(x_0)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = M(x_0)^{-1}\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Beweis.

Angenommen $f_1, \ldots, f_n$ bilden ein Fundamentalsystem. Dann liegt die Lösung jedes Anfangswertproblems

$$y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

im Erzeugnis von $f_1, \ldots, f_n$. Also gibt es $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 f_1(x_0) & + & \ldots & + & c_n f_n(x_0) & = & y_0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x_0) & + & \ldots & + & c_n f_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{array}$$

Diese Gleichungen lassen sich in Matrixform zusammenfassen zu

$$M(x_0) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Also ist $M(x_0)$ regulär.

Die Umkehrung ist auch richtig. Wenn $M(x_0)$ regulär ist, lässt sich jedes Anfangswertproblem im Erzeugnis von $f_1, \ldots, f_n$ lösen. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist daher dieses Erzeugnis schon der ganze Lösungsraum. □

4.2.3. Bemerkungen.

1. Durch 4.2.2 wird die Lösung eines Anfangswertproblems auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt. (Wenn man schon ein Fundamentalsystem kennt.)
2. Wenn man das Fundamentalsystem wie im Beweis von 4.1.4 wählt, dann gilt für die Wronskimatrix $M(x_0) = E_n$ (die n-dimensionale Einheitsmatrix). Dann wird die Lösung von Anfangswertproblemen besonders einfach.

4.3. Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung gibt es keine allgemeine Lösungstheorie. Wir werden uns daher auf die Betrachtung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschränken; d.h. solche der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Im Fall $n = 1$ liefert 3.3.2 die Lösung

$$f(x) = e^{-a_0 x}.$$

Dadurch motiviert macht man den Lösungsansatz $f(x) = e^{\lambda x}$.

4.3.1. Satz.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

und ihr zugehöriges charakteristisches Polynom

$$p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

mit denselben Koeffizienten.
Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{\lambda x}$ (mit Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = p(\lambda)f(x).$$

Insbesondere ist f genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn λ eine Nullstelle des Polynoms p ist.

Beweis.

Es gilt $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}, f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, allgemein $f^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x} = \lambda^k f(x)$ für $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} & f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) \\ &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} \\ &= p(\lambda) f(x). \end{aligned}$$

□

4.3.2. Satz.

Wenn das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

die n verschiedenen rellen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ besitzt, dann bilden die Funktionen $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \ldots, f_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Beweis.

Gemäß 4.2.2 reicht es zu zeigen, dass die Wronskimatrix von $f_1, \ldots, f_n$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ regulär ist. Wir wählen $x_0 = 0$ und erhalten

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Das ist eine sogenannte Vandermonde-Matrix.
Für $n = 2$ erhalten wir

$$W(0) = \det M(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Für $n = 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} W(0) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_3\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_3^2\lambda_1 \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0 \end{aligned}$$

Allgemein kann man mit vollständiger Induktion zeigen, dass gilt

$$W(0) = \prod_{j<k} (\lambda_k - \lambda_j),$$

und da wir voraussetzen, dass die Nullstellen von p verschieden sind, gilt $W(0) \neq 0$ für beliebiges n.

4.3.3. Beispiel.

Die Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 2y'' - 3y' = 0$$

hat das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^3 + 2X^2 - 3X.$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3$. Also bilden die Funktionen

$$f_1(x) = 1 (= e^{0x}), \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = e^{-3x}$$

ein Fundamentalsystem.

4.3.4. Probleme.

Bekanntermaßen hat nicht jedes reelle Polynom n-ten Grades n verschiedene reelle Nullstellen. Es erhebt sich also die Frage, wie man ein Fundamentalsystem bestimmt, wenn einer der folgenden Fälle eintritt:

- das charakteristische Polynom p besitzt mindestens eine nicht-reelle (d.h. komplexe) Nullstelle;
- das Polynom besitzt mehrfache (reelle oder komplexe) Nullstellen.

4.3.5. Komplexe Nullstellen.

In A 1.14.10 wurde die Exponentialfunktion auch für komplexe Werte definiert, und es ergab sich, dass für $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{u+iv} = e^u \cos v + ie^u \sin v.$$

Wir können daher für $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = e^{\lambda x} = e^{ax+ibx} = e^{ax} \cos(bx) + ie^{ax} \sin(bx)$$

betrachten. Für die Ableitung ergibt sich mit der Produktregel

$$f'(x) = (ae^{ax} \cos(bx) - be^{ax} \sin(bx)) + i(ae^{ax} \sin(bx) + be^{ax} \cos(bx))$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda x} &= (a + bi)(e^{ax} \cos(bx) + ie^{ax} \sin(bx)) \\ &= (ae^{ax} \cos(bx) - be^{ax} \sin(bx)) + i(ae^{ax} \sin(bx) + be^{ax} \cos(bx)) \end{aligned}$$

Also gilt die Regel

$$\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x}$$

auch für komplexe Werte von λ. Per Induktion folgert man daraus

$$\left(e^{\lambda x}\right)^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
Wenn also $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(X)$ einer linearen Differentialgleichung ist, können wir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: $x \mapsto e^{\lambda x}$ als komplexe Lösung der Differentialgleichung auffassen.
Um zu einer reellen Lösung zu gelangen, stellt man folgende Überlegung an:
Wenn $\lambda = a + ib$ eine nicht-reelle Nullstelle des reellen Polynoms $p(X)$ ist, dann ist die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda} = a - ib$ ebenfalls eine Nullstelle von $p(X)$; vgl. L 5.1.9.

Also ist auch $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $g(x) = e^{\overline{\lambda} x}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{ax-ibx} \\ &= e^{ax}\cos(-bx) + ie^{ax}\sin(-bx) \\ &= e^{ax}\cos(bx) - ie^{ax}\sin(bx) \\ &= \overline{f(x)}. \end{aligned}$$

Weil die Lösungen einen Vektorraum bilden, sind mit f und g auch alle Linearkombinationen von f und g Lösungen, insbesondere also $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f+g)$ und $\operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f-g)$. Damit erhalten wir die reellen Lösungen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = e^{ax}\cos(bx); \quad f_2(x) = e^{ax}\sin(bx).$$

4.3.6. Satz.

Wenn $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(X)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung ist, dann sind die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = e^{ax}\cos(bx); \quad f_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$$

linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung.

4.3.7. Beispiel.

Die Differentialgleichung

$$y'' + y = 0$$

hat das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^2 + 1$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i$. Also sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \cos x; \quad f_2(x) = \sin x$$

Lösungen. Für die Wronski-Matrix an der Stelle $x_0 = 0$ gilt

$$M(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ -\sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

Also ist f_1, f_2 das Fundamentalsystem aus dem Beweis von 4.1.4.

4.4. Polynome und Differentialoperatoren

Den Differentialoperator D mit $D(g) = g'$ kann man iterieren, und erhält $D^m(g) = D(D(\dots(D(g))\dots) = g^{(m)}$ für $m \in \mathbb{N}$. Für $m = 0$ definiert man $D^m = D^0$ als Identität, d.h. man setzt $D^0(g) = g$.
Für ein Polynom $q(X)$ vom Grade d mit Höchstkoeffizienten 1

$$q(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_1 X + b_0$$

kann man dann den Differentialoperator

$$q(D) = D^d + b_{d-1}D^{d-1} + \cdots + b_1 D + b_0 D^0$$

bilden, der auf d-fach differenzierbare Funktionen folgendermaßen angewendet wird:

$$\begin{aligned} q(D)(g) &= D^d(g) + b_{d-1}D^{d-1}(g) + \cdots + b_1 D(g) + b_0 g \\ &= g^{(d)} + b_{d-1}g^{(d-1)} + \cdots + b_1 g' + b_0 g \end{aligned}$$

Damit lässt sich eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe ihres charakteristischen Polynoms $p(X)$ schreiben als

$$p(D)(y) = 0.$$

Man kann solche polynomialen Differentialoperatoren hintereinander ausführen. Dabei multiplizieren sie sich genauso wie bei der Multiplikation von Polynomen. Insbesondere ist diese Verknüpfung kommutativ, d.h. für Polynome $q_1(X), q_2(X)$ und genügend oft differenzierbare Funktionen g gilt:

$$q_1(D)(q_2(D)(g)) = q_2(D)(q_1(D)(g)).$$

Wir zerlegen das charakteristische Polynom $p(X)$ unserer Differentialgleichung in Linearfaktoren.

$$\begin{aligned} p(X) \quad &= (X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2}\dots(X-\lambda_k)^{n_k}\cdot \\ &\quad \cdot(X-\mu_1)^{m_1}(X-\overline{\mu}_1)^{m_1}\dots(X-\mu_l)^{m_l}(X-\overline{\mu}_l)^{m_l}. \end{aligned}$$

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen reellen Nullstellen mit Vielfachheiten $n_1, \dots, n_k$, und $(\mu_1, \overline{\mu}_1), \dots, (\mu_l, \overline{\mu}_l)$ sind die Paare verschiedener nicht-reeller Nullstellen mit Vielfachheiten $m_1, \dots, m_l$. Für den Grad des Polynoms $p(X)$ gilt also

$$n = n_1 + \dots + n_k + 2m_1 + \dots + 2m_l.$$

Wegen der Vertauschungsregel für polynomiale Differentialoperatoren gilt der folgende

4.4.1. Satz.

Wenn für eine Funktion f eine der Bedingungen

$$\begin{aligned}(D-\lambda_j)^{n_j}(f)&=0, \quad j=1,\dots,k,\\ (D-\mu_j)^{m_j}(f)&=0, \quad j=1,\dots,l,\\ (D-\overline{\mu}_j)^{m_j}(f)&=0, \quad j=1,\dots,l,\end{aligned}$$

erfüllt ist, dann gilt auch

$$p(D)(f)=0.$$

Also ist f Lösung der Differentialgleichung

$$p(D)(y)=0.$$

4.4.2. Beobachtung.

Im Fall $\lambda=0$ sind die Funktionen, die der Bedingung

$$(D-\lambda)^m(f)=D^m(f)=f^{(m)}=0$$

genügen, genau die Polynome vom Grad höchstens $m-1$.
Anders formuliert: Die Funktionen $f_1(x)=1,\dots,f_m(x)=x^{m-1}$ bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y^{(m)}=0$.

Mit Hilfe des folgenden Satzes lässt sich der allgemeine Fall auf diesen Spezialfall zurückführen.

4.4.3. Satz (Verschiebungsregel von Heaviside).

Für $\lambda\in\mathbb{C}, m\in\mathbb{N}$ und m-mal differenzierbare Funktionen f gilt:

$$D^m(e^{-\lambda x}f)=e^{-\lambda x}(D-\lambda)^m(f)$$

bzw.

$$(D-\lambda)^m(f)=e^{\lambda x}D^m(e^{-\lambda x}f).$$

Beweis.

Wir führen einen Induktionsbeweis über m.

(IA) $m = 1$

$$D(e^{-\lambda x} f) = -\lambda e^{-\lambda x} f + e^{-\lambda x} D(f) = e^{-\lambda x}(D - \lambda)(f).$$

(IS) Angenommen, wir wüssten schon, dass

$$D^m(e^{-\lambda x} f) = e^{-\lambda x}(D - \lambda)^m(f).$$

gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} D^{m+1}(e^{-\lambda x} f) &= D(D^m(e^{-\lambda x} f)) = D(e^{-\lambda x}(D - \lambda)^m(f)) \\ &= -\lambda e^{-\lambda x}(D - \lambda)^m(f) + e^{-\lambda x} D((D - \lambda)^m(f)) \\ &= e^{-\lambda x}(D - \lambda)(D - \lambda)^m(f) \\ &= e^{-\lambda x}(D - \lambda)^{m+1}(f). \end{aligned}$$

□

4.4.4. Folgerung.

Die Funktionen f, die der Bedingung

$$(D - \lambda)^m(f) = 0$$

genügen, sind genau die Funktionen der Form

$$f(x) = e^{\lambda x} r(x)$$

mit einem Polynom r vom Grad höchstens $m - 1$.

Beweis.

Wegen 4.4.3 gilt für eine Funktion f genau dann $(D - \lambda)^m(f) = 0$ wenn gilt $D^m(e^{-\lambda x} f) = 0$. Nach 4.4.2 ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass $r = e^{-\lambda x} f$ ein Polynom vom Grad höchstens $m - 1$ ist. □

4.4.5. Satz.

Es sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung mit zugehörigem charakteristischen Polynom $p(X)$. Die Linearfaktorzerlegung von $p(X)$ sei gegeben als:

$$\begin{aligned} p(X) \quad &= (X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2}\ldots(X-\lambda_k)^{n_k}\cdot \\ &\quad \cdot(X-\mu_1)^{m_1}(X-\overline{\mu}_1)^{m_1}\ldots(X-\mu_l)^{m_l}(X-\overline{\mu}_l)^{m_l}. \end{aligned}$$

Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen reellen Nullstellen mit Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$, und $(\mu_1, \overline{\mu}_1), \ldots, (\mu_l, \overline{\mu}_l)$ sind die Paare verschiedener nicht-reeller Nullstellen mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_l$. Weiterhin sei

$$\mu_j = \alpha_j + i\beta_j.$$

Dann bilden die folgenden $n = n_1 + \cdots + n_k + 2m_1 + \cdots + 2m_l$ Funktionen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung:

$$\begin{array}{ll}
e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x} & (n_1 \text{ Funktionen}) \\
\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \\
e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{n_k-1}e^{\lambda_k x} & (n_k \text{ Funktionen}) \\
e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), \ldots, x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x) & (m_1 \text{ Funktionen}) \\
\vdots \quad \ddots \quad \vdots & \\
e^{\alpha_l x}\cos(\beta_l x), \ldots, x^{m_l-1}e^{\alpha_l x}\cos(\beta_l x) & (m_l \text{ Funktionen}) \\
e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x), \ldots, x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x) & (m_1 \text{ Funktionen}) \\
\vdots \quad \ddots \quad \vdots & \\
e^{\alpha_l x}\sin(\beta_l x), \ldots, x^{m_l-1}e^{\alpha_l x}\sin(\beta_l x) & (m_l \text{ Funktionen})
\end{array}$$

Der Beweis ergibt sich aus unseren bisherigen Überlegungen. Nach 4.4.4 und 4.4.1 sind alle angegebenen Funktionen Lösungen der Differentialgleichung. Im Fall nicht-reeller Nullstellen verfahren wir wie in 4.3.5. Da wir insgesamt n Funktionen erhalten haben, bleibt nur noch zu zeigen, dass diese linear unabhängig sind. Das gelingt mit Hilfe der Wronski-Matrix, vgl. 4.2.1. (Details als Übung.)

4.4.6. Beispiel.

Die lineare Differentialgleichung

$$y^{(7)} - 5y^{(6)} + 5y^{(5)} + 15y^{(4)} - 25y^{(3)} - 19y'' + 35y' + 25y = 0$$

hat das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^7 - 5X^6 + 5X^5 + 15X^4 - 25X^3 - 19X^2 + 35X + 25$$

Die Nullstellen sind

$$\lambda_1 = -1, n_1 = 3, \quad \mu_1 = 2 + i, \overline{\mu}_1 = 2 - i, m_1 = 2.$$

Also bilden die Funktionen

$$\begin{aligned} &f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = xe^{-x}, f_3(x) = x^2 e^{-x}, \\ &f_4(x) = e^{2x}\cos(x), f_5(x) = xe^{2x}\cos(x), \\ &f_6(x) = e^{2x}\sin(x), f_7(x) = xe^{2x}\sin(x) \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem.

5. Inhomogene lineare Differentialgleichungen

5.1. Theoretisches

5.1.1. Definition.

Eine inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung ist eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x)$$

mit stetigen Funktionen $a_0, \ldots, a_{n-1}, h : J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion h heißt Inhomogenität oder Störfunktion.
Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Genau wie in 3.3.5 zeigt man

5.1.2. Satz.

Es sei $f_p : J \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x),$$

dann besteht die Gesamtheit der Lösungen genau aus den Funktionen

$$f_p + f,$$

wobei f irgendeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist.

5.1.3. Zusatz.

Es sei $f_1, \ldots, f_n : J \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Weiterhin sei $x_0 \in J$ und $M(x_0)$ die zugehörige Wronski-Matrix. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

gegeben durch

$$f = f_p + c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n.$$

Man erhält $c_1, \ldots, c_n$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$M(x_0) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_p(x_0) \\ \vdots \\ f_p^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Beweis.

Der Beweis ergibt sich genau wie in 3.3.9 und 4.2.2. Zur Berechnung von $c_1, \ldots, c_n$ wertet man $f = f_p + c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$ und die Ableitungen von f an der Stelle x_0 aus, und erhält:

$$\begin{array}{ccccccc} f_p(x_0) & + & c_1 f_1(x_0) & + & \ldots & + & c_n f_n(x_0) & = y_0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_p^{(n-1)}(x_0) & + & c_1 f_1^{(n-1)}(x_0) & + & \ldots & + & c_n f_n^{(n-1)}(x_0) & = y_{n-1} \end{array}$$

Diese Gleichungen lassen sich in Matrixform zusammenfassen zu

$$\begin{pmatrix} f_p(x_0) \\ \vdots \\ f_p^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + M(x_0) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

□

5.2. Variation der Konstanten

Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = h(x)$$

und nehmen an, dass wir schon ein Fundamentalsystem von Lösungen $f_1, \ldots, f_n : J \to \mathbb{R}$ für die zugehörige homogene Gleichung kennen. Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden macht man wie in 3.3.7 den Ansatz:

$$f_p(x) = c_1(x) f_1(x) + \cdots + c_n(x) f_n(x)$$

und versucht Funktionen $c_1, \ldots, c_n : J \to \mathbb{R}$ so zu bestimmmen, dass f_p die inhomogene Gleichung löst.

Mit Hilfe der Produktregel berechnet man

$$\begin{aligned} f_p'(x) &= c_1(x)f_1'(x) + \cdots + c_n(x)f_n'(x) \\ &\quad + [c_1'(x)f_1(x) + \cdots + c_n'(x)f_n(x)]. \end{aligned}$$

Man fordert jetzt, dass der Ausdruck in der eckigen Klammer gleich Null ist. Dann ergibt sich für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f_p''(x) &= c_1(x)f_1''(x) + \cdots + c_n(x)f_n''(x) \\ &\quad + [c_1'(x)f_1'(x) + \cdots + c_n'(x)f_n'(x)]. \end{aligned}$$

Man verlangt wieder, dass der Ausdruck in der eckigen Klammer gleich Null ist, und iteriert diesen Prozess bis zur $(n-1)$-ten Ableitung von f_p.

Für die n-te Ableitung von f_p erhält man dann

$$\begin{aligned} f_p^{(n)}(x) &= c_1(x)f_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)f_n^{(n)}(x) \\ &\quad + [c_1'(x)f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)f_n^{(n-1)}(x)]. \end{aligned}$$

Jetzt setzt man den Ausdruck in der eckigen Klammer gleich $h(x)$. Damit erhalten wir insgesamt das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccc} c_1'(x)f_1(x) & + \ \ldots \ + & c_n'(x)f_n(x) & = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1'(x)f_1^{(n-2)}(x) & + \ \ldots \ + & c_n'(x)f_n^{(n-2)}(x) & = 0 \\ c_1'(x)f_1^{(n-1)}(x) & + \ \ldots \ + & c_n'(x)f_n^{(n-1)}(x) & = h(x). \end{array}$$

Mit Hilfe der Wronski-Matrix $M(x)$ können wir das auch schreiben als:

$$M(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(x) \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(x) \end{pmatrix}.$$

Da die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ Lösungen der homogenen Gleichung sind, sieht man durch Einsetzen, dass f_p eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

$$
\begin{aligned}
& f_p^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) f_p^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x) f_p(x) \\
&\quad = h(x) + c_1(x) f_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x) f_n^{(n)}(x) \\
&\qquad + a_{n-1}(x)\left(c_1(x) f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x) f_n^{(n-1)}(x)\right) \\
&\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad + a_0(x)\left(c_1(x) f_1(x) + \cdots + c_n(x) f_n(x)\right) \\
&\quad = h(x) + c_1(x)\left(f_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x) f_1(x)\right) \\
&\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad + c_n(x)\left(f_n^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) f_n^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x) f_n(x)\right) \\
&\quad = h(x).
\end{aligned}
$$

5.2.1. Satz.

Gegeben sei die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = h(x).$$

Weiterhin sei $f_1, \ldots, f_n$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mit Wronskimatrix $M(x)$. Die Funktionen $c_1, \ldots, c_n : J \to \mathbb{R}$ seien Stammfunktionen der durch

$$M(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(x) \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

bestimmten Funktionen $c_1', \ldots, c_n' : J \to \mathbb{R}$. Dann ist $f_p : J \to \mathbb{R}$ mit

$$f_p(x) = c_1(x) f_1(x) + \cdots + c_n(x) f_n(x)$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

5.2.2. Bemerkungen.

1. Bei der Durchführung des gerade beschriebenen Algorithmus muss man lineare Gleichungssysteme lösen, deren Koeffizientenmatrix und Inhomogenität keine Zahlen sondern Funktionen enthält. Deshalb sollte man bei der Anwendung des Gauß-Algorithmus Divisionen vermeiden, und diese erst ganz am Schluss durchführen.
2. Im Fall $n = 2$ lohnt es sich meistens die Wronski-Matrix zu invertieren nach der bekannten Formel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

5.2.3. Beispiel.

Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + y = \tan x, \quad x \neq \frac{2m+1}{2}\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

Nach 4.3.7 bilden die Funktionen f_1, f_2 mit $f_1(x) = \cos x, f_2(x) = \sin x$ ein Fundamentalsystem. Für ihre Wronskimatrix gilt

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Zur Illustration lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan x \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\left[\begin{array}{cc||c} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & \tan x \end{array}\right]$$

Anstatt die erste Zeile mit $\frac{\sin x}{\cos x}$ zu multiplizieren und sie zur zweiten Zeile zu addieren, multiplizieren wir die erste Zeile mit $\sin x$ und die zweite mit $\cos x$, und erhalten

$$\left[\begin{array}{cc||c} \cos x \sin x & (\sin x)^2 & 0 \\ -\sin x \cos x & (\cos x)^2 & \sin x \end{array}\right].$$

Addition der ersten Zeile zur zweiten ergibt

$$\left[\begin{array}{cc||c} \cos x \sin x & (\sin x)^2 & 0 \\ 0 & 1 & \sin x \end{array}\right].$$

Jetzt multiplizieren wir die zweite Zeile mit $(\sin x)^2$ und ziehen sie von der ersten ab

$$\left[\begin{array}{cc||c} \cos x \sin x & 0 & -(\sin x)^3 \\ 0 & 1 & \sin x \end{array}\right].$$

Erst wenn die Koeffizientenmatrix Diagonalgestalt erreicht hat, führen wir Divisionen durch.
In unserem Beispiel dividieren wir die erste Zeile durch $\cos x \sin x$ und erhalten

$$\left[\begin{array}{cc||c} 1 & 0 & -\frac{(\sin x)^2}{\cos x} \\ 0 & 1 & \sin x \end{array}\right].$$

Also gilt

$$c_1'(x) = -\frac{(\sin x)^2}{\cos x}; \quad c_2'(x) = \sin x.$$

Damit erhalten wir sofort

$$c_2(x) = -\cos x$$

als eine erlaubte Stammfunktion von c_2'.
Um eine Stammfunktion von c_1' zu berechnen, substituieren wir $u = \sin x$, also $\mathrm{d}\,u = \cos x \,\mathrm{d}\,x$, und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\int -\frac{(\sin x)^2}{\cos x}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{-(\sin x)^2}{(\cos x)^2}\cos x\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int \frac{-u^2}{1-u^2}\,\mathrm{d}\,u = \int \left(1 - \frac{1}{1-u^2}\right)\mathrm{d}\,u \\
&= \int \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1+u} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-u}\right)\mathrm{d}\,u \\
&= \left[u - \frac{1}{2}\ln|1+u| + \frac{1}{2}\ln|1-u|\right] \\
&= \left[\sin x - \frac{1}{2}\ln|1+\sin x| + \frac{1}{2}\ln|1-\sin x|\right]
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir die partikuläre Lösung

$$
\begin{aligned}
f_p(x) &= c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) \\
&= \left(\sin x - \tfrac{1}{2}\ln|1+\sin x| + \tfrac{1}{2}\ln|1-\sin x|\right)\cos x + (-\cos x)\sin x \\
&= \tfrac{1}{2}\cos x(-\ln|1+\sin x| + \ln|1-\sin x|).
\end{aligned}
$$

Eine Probe empfiehlt sich.

5.3. Ansatz nach Art der rechten Seite

Die Methode der Variation der Konstanten funktioniert im Prinzip immer (wenn man ein Fundamentalsystem kennt), kann jedoch zu sehr aufwendigen Rechnungen führen.
Bei speziellen rechten Seiten (= Störfunktionen) von inhomogenen linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten gibt es eine einfachere Methode zur Berechnung einer partikulären Lösung. Dabei handelt es sich um Störfunktionen, die auch als Lösungen für homogene Differentialgleichungen in Frage kommen, also um Funktionen, die sich multiplikativ aus Exponentialfunktionen, sin- und cos-Funktionen und Polynomen zusammensetzen.

Grundlegend ist die folgende Verallgemeinerung der Verschiebungsregel von Heaviside, vgl. 4.4.3.

5.3.1. Satz.

Es sei $p(X)$ ein Polynom, $\mu \in \mathbb{R}$ (oder allgemeiner $\mu \in \mathbb{C}$) und $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$p(D)(e^{\mu x} q(x)) = e^{\mu x} p(D + \mu)(q(x)).$$

Falls $q(x)$ ein Polynom vom Grad k und μ eine m-fache Nullstelle des Polynoms $p(X)$ ist, dann ist $p(D + \mu)(q(x))$ ein Polynom vom Grad $k - m$, und jedes Polynom vom Grad $k - m$ lässt sich so erhalten.

5.3.2. Satz.

Gegeben sei die inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = h(x)$$

mit charakteristischem Polynom $p(X)$.
Die Funktion h sei von der Form $h(x) = r(x)e^{\mu x}$ mit einem Polynom r vom Grade $d \in \mathbb{N}_0$ und einer Zahl $\mu \in \mathbb{R}$.

1. *Falls $p(\mu) \neq 0$ gilt, dann hat die Differentialgleichung eine partikuläre Lösung f_p der Form $f_p(x) = s(x)e^{\mu x}$ mit einem Polynom s vom gleichen Grad d.*
2. *(Resonanzfall) Falls μ eine m-fache Nullstelle von $p(X)$ ist, $m > 0$, dann hat die Differentialgleichung eine partikuläre Lösung f_p der Form $f_p(x) = x^m s(x)e^{\mu x}$ mit einem Polynom s vom gleichen Grad d.*

Beweis.

Man macht für f_p den Ansatz $f_p(x) = q(x)e^{\mu x}$ mit einem Polynom $q(x)$ vom Grad k. Nach 5.3.1 gilt dann

$$p(D)(f_p(x)) = p(D)(q(x)e^{\mu x}) = e^{\mu x}p(D+\mu)(q(x)),$$

und $p(D+\mu)(q(x))$ ist ein Polynom vom Grad $k-m$. Damit f_p eine Lösung der Differentialgleichung wird, sollte $p(D+\mu)(q(x)) = r(x)$ gelten. Also müssen wir $k = m+d$ wählen. Eine Zusatzüberlegung zeigt, dass man sogar $q(x) = x^m s(x)$ mit einem Polynom $s(x)$ vom Grade d erreichen kann.
Man erhält $s(x)$ also durch Lösen der Gleichnug

$$p(D+\mu)(x^m s(x)) = r(x),$$

in der keine Exponentialfunktion vorkommt. □

5.3.3. Bemerkungen.

1. Fall 1 ist der Spezialfall $m = 0$ von Fall 2.
2. Bei der Anwendung dieses Verfahrens ist es nicht nötig, ein Fundamentalsystem zu kennen.
3. Um $p(D+\mu)$ zu berechnen, ersetzt man X durch $X+\mu$ und bestimmt das Polynom $p(X+\mu)$. Das erfordert einigen Rechenaufwand, erspart jedoch später die Berechnung der Ableitungen von Exponentialfunktionen, da der Operator $p(D+\mu)$ nur auf Polynome angewendet wird.
4. Das Verfahren funktioniert auch für $\mu \in \mathbb{C}$. In diesem Fall muss man s als Polynom mit komplexen Koeffizienten ansetzen.
   Falls die Störfunktion von der Form $h(x) = r(x)e^{ax}\cos(bx)$, bzw. $h(x) = r(x)e^{ax}\sin(bx)$, $a, b \in \mathbb{R}$, ist, setzt man $\mu = a+bi \in \mathbb{C}$ und berechnet eine partikuläre Lösung $\tilde{f_p}$ zur Störfunktion $\tilde{h}(x) = r(x)e^{\mu x}$. Anschließend setzt man $f_p(x) = \operatorname{Re}\tilde{f_p}(x)$ bzw. $f_p(x) = \operatorname{Im}\tilde{f_p}(x)$.

5.3.4. Beispiel.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' = (4x^2 - 6)e^{2x}.$$

Das charakteristische Polynom $p(X) = X^3 - 2X^2 = X^2(X-2)$ hat 2 als einfache Nullstelle (Resonanzfall). Damit Ansatz:

$$\begin{aligned}
f_p(x) &= x(s_2x^2 + s_1x + s_0)e^{2x} \\
&= (s_2x^3 + s_1x^2 + s_0x)e^{2x} \\
f_p'(x) &= (3s_2x^2 + 2s_1x + s_0 + 2s_2x^3 + 2s_1x^2 + 2s_0x)e^{2x} \\
&= (2s_2x^3 + (3s_2 + 2s_1)x^2 + (2s_1 + 2s_0)x + s_0)e^{2x} \\
f_p''(x) &= (4s_2x^3 + (12s_2 + 4s_1)x^2 + (6s_2 + 8s_1 + 4s_0)x + 2s_1 + 4s_0)e^{2x} \\
f_p'''(x) &= (8s_2x^3 + (36s_2 + 8s_1)x^2 + (36s_2 + 24s_1 + 8s_0)x \\
&\qquad +6s_2 + 12s_1 + 12s_0)e^{2x}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
f_p'''(x) - 2f_p''(x) &= (0 \cdot x^3 + 12s_2x^2 + (24s_2 + 8s_1)x + 6s_2 + 8s_1 + 4s_0)e^{2x} \\
&= (4x^2 - 6)e^{2x}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei x^2, x und 1 führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
12s_2 &= 4 \\
24s_2 + 8s_1 &= 0 \\
6s_2 + 8s_1 + 4s_0 &= -6
\end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung

$$s_2 = \frac{1}{3}; \quad s_1 = -1; \quad s_0 = 0.$$

Damit erhalten wir die spezielle Lösung

$$f_p(x) = (\frac{1}{3}x^3 - x^2)e^{2x}.$$

Es empfiehlt sich eine Probe.

Alternativ wollen wir die Berechnung von f_p auch noch mit dem Operatorenkalkül durchführen. Es gilt $p(X) = X^3 - 2X^2$, und damit

$$\begin{aligned} p(X+2) &= (X+2)^3 - 2(X+2)^2 \\ &= (X+2)^2(X+2-2) = X^3 + 4X^2 + 4X. \end{aligned}$$

Anwendung des Differentialoperators $p(D+2)$ auf $x \cdot s(x) = s_2x^3 + s_1x^2 + s_0x$ ergibt

$$\begin{aligned} p(D+2)(s_2x^3 + s_1x^2 + s_0x) &= (s_2x^3 + s_1x^2 + s_0x)''' \\ &+ 4(s_2x^3 + s_1x^2 + s_0x)'' + 4(s_2x^3 + s_1x^2 + s_0x)' \\ &= 6s_2 + 4(6s_2x + 2s_1) + 4(3s_2x^2 + 2s_1x + s_0) \\ &= 12s_2x^2 + (24s_2 + 8s_1)x + 6s_2 + 8s_1 + 4s_0. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich führt auf dasselbe lineare Gleichungssystem wie vorher, und damit auch auf dieselbe Lösung.

5.3.5. Beispiel.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + y = e^{-x}\sin(2x) = h(x).$$

Die komplexe Zahl $\mu = -1 + 2i$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(X) = X^2 + 1$. Also betrachten wir die komplexe Störfunktion $\tilde{h}(x) = e^{\mu x}$ und machen für eine partikuläre Lösung $\tilde{f_p}$ den Ansatz

$$\tilde{f_p}(x) = ce^{\mu x}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Es gilt

$$\tilde{f_p}'(x) = \mu ce^{\mu x} \quad \text{und} \quad \tilde{f_p}''(x) = \mu^2 ce^{\mu x}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\tilde{f_p}''(x) + \tilde{f_p}(x) = \mu^2 ce^{\mu x} + ce^{\mu x} = (\mu^2 + 1)ce^{\mu x} = e^{\mu x}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\mu^2+1} = \frac{1}{(-1+2i)^2+1} = \frac{1}{1-4-4i+1} \\ &= \frac{1}{-2-4i} = \frac{-2+4i}{(-2-4i)(-2+4i)} = \frac{-2+4i}{4+16} = \frac{-1+2i}{10} \end{aligned}$$

Für die partikuläre Lösung ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{f_p}(x) &= ce^{\mu x} = \frac{-1+2i}{10} e^{-x}(\cos(2x) + i\sin(2x)) \\ &= \frac{1}{10} e^{-x} \left(-\cos(2x) - 2\sin(2x) + i\left(2\cos(2x) - \sin(2x)\right)\right). \end{aligned}$$

Da $h(x)$ der Imaginärteil von $\tilde{h}(x)$ ist, gilt das auch für die partikuläre Lösung. Also ist

$$f_p(x) = \operatorname{Im} \tilde{f_p}(x) = \frac{1}{10} e^{-x} \left(2\cos(2x) - \sin(2x)\right)$$

eine partikuläre Lösung unserer Differentialgleichung. (Probe!)

Alternativ wollen wir wieder den Operatorenkalkül verwenden, diesmal komplex. Wir betrachten also zum charakteristischen Polynom $p(X) = X^2 + 1$ das verschobene Polynom

$$\begin{aligned} p(X-1+2i) &= (X-1+2i)^2 + 1 \\ &= X^2 + 2(-1+2i)X + (-1+2i)^2 + 1 \\ &= X^2 + (-2+4i)X + 1 - 4 - 4i + 1 \\ &= X^2 + (-2+4i)X - 2 - 4i. \end{aligned}$$

Anwendung des Differentialoperators $p(D-1+2i)$ auf das (konstante) Polynom $s(x) = c$ ergibt

$$p(D-1+2i)(c) = c'' + (-2+4i)c' + (-2-4i)c = (-2-4i)c,$$

und wie erhalten die gleiche Lösung wie vorher.

5.3.6. Bemerkung.

Man kann die konkrete Rechnung mit komplexen Zahlen vermeiden, muss dann aber sowohl bei Störfunktionen der Form

$$h(x) = r(x)e^{ax}\cos(bx)$$

als auch solchen der Form

$$h(x) = r(x)e^{ax}\sin(bx)$$

einen Ansatz der Form

$$f_p(x) = x^m e^{ax}(s(x)\cos(bx) + t(x)\sin(bx))$$

machen. Dabei ist $\mu = a + bi$ eine m-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(X)$, und s und t sind Polynome vom gleichen Grad wie das Polynom r.

5.3.7. Satz (Superpositionsprinzip).

Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = h_j(x)$$

mit verschiedenen Störfunktionen $h_j, j = 1, \ldots, k$, (bei gleicher linker Seite).
Ist f_{pj} eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung, $j = 1, \ldots, k$, so ist

$$f_p = f_{p1} + \cdots + f_{pk}$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Störfunktion

$$h = h_1 + \cdots + h_k.$$

6. Systeme von Differentialgleichungen

6.1. Grundlagen

6.1.1. Definition.

Gegeben sei eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $g_1, \ldots, g_n : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$y' = g(x, y)$$

bzw. ausgeschrieben

$$\begin{aligned} y_1' &= g_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n' &= g_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

ein (explizites) Differentialgleichungssystem 1. Ordnung.
Es handelt sich also um n gekoppelte Gleichungen für n Funktionen von einer Variablen.

Eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion

$$f : I \to \mathbb{R}^n$$

mit Komponenten

$$f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R},$$

so dass für alle $x \in I$ gilt

$$(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in D$$

und

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= g_1(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ f_n'(x) &= g_n(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{aligned}$$

bzw. kürzer

$$f'(x) = g(x, f(x)).$$

6.1.2. Bemerkungen.

1. Bei einem Differentialgleichungssystem werden n Funktionen von einer Variablen gesucht. Es handelt sich also um eine gewöhnliche Differentialgleichung, da keine partiellen Ableitungen auftreten.
2. Die Lösungen eines Differentialgleichungssystems kann man als Kurven im $\mathbb{R}^n$ interpretieren. Man spricht dann auch von Lösungskurven.

6.1.3. Differentialgleichungen n-ter Ordnung und Differentialgleichungssysteme.

Man kann eine explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung der Form $y^{(n)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ durch Einführung neuer Variablen $y_1, \ldots, y_n$ in ein System 1. Ordnung mit n Gleichungen umwandeln. Man schreibt

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ \vdots &= \vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= g(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Wenn dann $f = (f_1, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist, dann ist $f_1 : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.
Ist umgekehrt $f : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Ausgangsgleichung, dann ist $x \mapsto (f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems.

6.1.4. Definition.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $g : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(x_0, v_1, \ldots, v_n) \in D$. Dann heißt

$$\begin{aligned} &y' = g(x, y); \\ &y_1(x_0) = v_1, y_2(x_0) = v_2, \ldots, y_n(x_0) = v_n \text{ (kurz: } y(x_0) = v) \end{aligned}$$

ein Anfangswertproblem. Eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung des Anfangswertproblems, wenn gilt

- $f'(x) = g(x, f(x))$ für alle $x \in I$;
- $x_0 \in I$;
- $f_1(x_0) = v_1, f_2(x_0) = v_2, \ldots, f_n(x_0) = v_n$ (kurz: $f(x_0) = v$).

Genau wie im eindimensionalen Fall gilt

6.1.5. Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $g : D \to \mathbb{R}^n$ stetig.

1. (Peano) Für jedes $(x_0, v_1, \ldots, v_n) \in D$ gibt es ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so dass das Anfangswertproblem eine Lösung $f : I \to \mathbb{R}^n$ besitzt.
2. (Picard-Lindelöf) Wenn g zusätzlich stetig partiell nach den letzten n Variablen $y_1, \ldots, y_n$ differenzierbar ist, d.h. alle Komponenten $g_1, \ldots, g_n$ sind nach allen Variablen $y_1, \ldots, y_n$ stetig partiell differenzierbar, dann ist die Lösung eindeutig bestimmt.

6.2. Lineare Differentialgleichungssysteme

6.2.1. Definition.

Ein Differentialgleichungssystem heißt linear wenn es von folgender Form ist:

$$y' = A(x)y + h(x),$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{pmatrix}$$

Dabei sind $A : J \to \mathbb{R}^{n \times n}$ (= Menge der $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen) und $h : J \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$.
Falls $h = 0$ gilt, heißt das System homogen, andernfalls inhomogen.

6.2.2. Satz.

1. *Die Lösungen eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems mit n Gleichungen bilden einen n-dimensionalen Vektorraum.*
   Jede Basis dieses Vektorraums heißt ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems.
2. *Sei $f_p : J \to \mathbb{R}^n$ eine spezielle Lösung eines inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems. Dann lässt sich jede Lösung dieses Systems schreiben als*

$$f_p + f,$$

   wobei f eine beliebige Lösung des zugehörigen homogenen Systems ist.

Dass die Lösungen eines homogenen Systems einen Vektorraum bilden, sieht man genauso wie im Fall linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung, vgl. 4.1.4. Entscheidend ist, dass y und y' linear in das Differentialgleichungssystem eingehen.
Um zu zeigen, dass der Lösungsraum n-dimensional ist, wählt man $x_0 \in J$ und löst für $k = 1, \ldots, n$ die Anfangswertprobleme $y_k(x_0) = e_k$ (= der k-te kanonische Basisvektor). Die zugehörigen Funktionen $f_1, \ldots, f_n : J \to \mathbb{R}^n$ bilden dann ein Fundamentalsystem.
Der Satz über die Struktur der Lösungen eines inhomogenen Systems ergibt sich genau wie im eindimensionalen Fall, vgl. 3.3.5.

6.2.3. Definition.

Es seien $f_1, \ldots, f_n : J \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = A(x)y$$

und $x_0 \in J$. Dann heißt die Matrix mit $f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0)$ als Spalten, also

$$M(x_0) = \begin{pmatrix} f_1(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \end{pmatrix}$$

die Wronski-Matrix von $f_1, \ldots, f_n$ an der Stelle x_0, und

$$W(x_0) = \det M(x_0)$$

heißt die Wronski-Determinante.

6.2.4. Satz.

Es seien $f_1, \ldots, f_n : J \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = A(x)y$$

und $x_0 \in J$. Dann bilden $f_1, \ldots, f_n$ genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die Wronski-Matrix $M(x_0)$ regulär ist, oder äquivalent wenn für die Wronski-Determinante gilt $W(x_0) \neq 0$. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x_0) = v$$

gegeben durch $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$, mit

$$M(x_0) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = M(x_0)^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

6.2.5. Bemerkungen.

1. Für die Lösung des Anfangswertproblems $f : J \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = M(x)M(x_0)^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

2. Da $f_1, \ldots, f_n$ die Spalten der Wronski-Matrix bilden, ergibt sich folgendes Notationsproblem. Nach der Merkregel: Zeilen zuerst, Spalten später, ist der Spaltenindex der zweite Index. Also muss man die einzelnen Komponenten der Funktion $f_k : J \to \mathbb{R}^n$ —etwas widersinnig — mit $f_{jk} : J \to \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ bezeichnen.

6.3. Systeme mit konstanten Koeffizienten

Genau wie bei linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung gibt es auch für lineare Systeme keine allgemeine Lösungstheorie. Wir werden uns daher auf die Betrachtung von homogenen linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten beschränken, d.h. solchen der Form

$$y' = Ay$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Für die Behandlung solcher Systeme gibt es verschiedene Möglichkeiten. Das hier vorgestellte Lösungsverfahren geht von der Grundidee aus, dass jede Komponente $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ einer (skalaren) linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung genügt.

6.3.1. Beobachtung.

Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Bedingung $f'(x) = Af(x)$ genügt, dann gilt auch $f''(x) = Af'(x) = AAf(x) = A^2 f(x)$, und allgemein folgt per Induktion $f^{(k)}(x) = A^k f(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Wenn wir ein Polynom

$$q(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_1 X + b_0$$

vom Grad $d \in \mathbb{N}$ finden können mit

$$q(A) = A^d + b_{d-1}A^{d-1} + \cdots + b_1 A + b_0 E = 0,$$

dann folgt

$$\begin{aligned}(q(D)f)(x) &= f^{(d)}(x) + b_{d-1}f^{(d-1)}(x) + \cdots + b_1 f'(x) + b_0 f(x)\\ &= A^d f(x) + b_{d-1}A^{d-1}f(x) + \cdots + b_1 Af(x) + b_0 f(x)\\ &= (A^d + b_{d-1}A^{d-1} + \cdots + b_1 A + b_0 E)f(x) = 0.\end{aligned}$$

Also ist jede Komponente von f Lösung der skalaren Differentialgleichung d-ter Ordnung

$$q(D)y = 0.$$

Es gibt einen Satz der Linearen Algebra, der besagt, dass es solch ein Polynom tatsächlich gibt.

6.3.2. Satz von Cayley-Hamilton.

Jede quadratische Matrix A genügt ihrem eigenen charakteristischen Polynom $\chi_A(X) = \det(A - X \cdot E)$, d.h. es gilt $\chi_A(A) = 0$.

6.3.3. Beispiel.

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\chi_A(X) = \det(A - XE) = (1 - X)(-3 - X) - 2 \cdot 4 = X^2 + 2X - 11$$

und

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen ergibt

$$\chi_A(A) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei $p(X) = (-1)^n \chi_A(X) = \det(X \cdot E - A)$ das auf Höchstkoeffizienten Eins normierte charakteristische Polynom von A. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay; \quad y(x_0) = v.$$

Dann gilt $f'(x_0) = Af(x_0) = Av$, und allgemein $f^{(k)}(x_0) = A^k v$ für $k \in \mathbb{N}$. Also ist die j-te Komponente $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $f, j = 1, \ldots, n$, die Lösung des (skalaren) Anfangswertproblems

$$p(D)y = 0; y(x_0) = v_j, \; y'(x_0) = (Av)_j, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = (A^{n-1}v)_j.$$

Jetzt bezeichne $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $p(D)y = 0$, und $M(x_0)$ seine Wronskimatrix im Punkt x_0. Dann gibt es $c_{jk} \in \mathbb{R}$ mit $f_j = c_{j1}g_1 + \cdots + c_{jn}g_n$, die man gemäß 4.2.2 erhält durch Auflösen des linearen Gleichungssystems

$$M(x_0) \begin{pmatrix} c_{j1} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_j \\ \vdots \\ (A^{n-1}v)_j \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Matrix $C = (c_{jk})$ können wir diese Gleichungen zusammenfassen zu

$$M(x_0)\,C^T = \begin{pmatrix} v^T \\ \vdots \\ (A^{n-1}v)^T \end{pmatrix}.$$

Die Matrix C^T tritt auf, da auf der linken Seite der obigen Gleichung das Produkt von $M(x_0)$ mit der j-ten Zeile von C berechnet wird.

Die letzte Gleichung lässt sich umformen zu

$$C = \begin{pmatrix} v & \ldots & A^{n-1}v \end{pmatrix} \left(M(x_0)^T\right)^{-1}.$$

Die Gleichungen $f_j = c_{j1}g_1 + \cdots + c_{jn}g_n, j = 1, \ldots, n$, können wir zusammenfassen zu

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & \ldots & A^{n-1}v \end{pmatrix} \left(M(x_0)^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Insgesamt ergibt sich folgendes Resultat:

6.3.4. Satz.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine relle $n \times n$-Matrix mit normierten charakteristischen Polynom $p(X) = (-1)^n \chi_A(X) = \det(X \cdot E - A)$. Weiterhin sei $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem der (skalaren) Differentialgleichung $p(D)y = 0$, und $M(x_0)$ seine Wronskimatrix im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist dann die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay;\ y(x_0) = v$$

gegeben durch

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v & Av & \ldots & A^{n-1}v \end{array} \right) \left(M(x_0)^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

6.3.5. Beispiel.

Wir wollen mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 6.3.3 das Anfangswertproblem

$$y' = Ay,\ y(0) = v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

lösen. Das charakteristische Polynom

$$\chi_A(X) = \det(A - XE) = X^2 + 2X - 11$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1 + 2\sqrt{3}$ und $\lambda_2 = -1 - 2\sqrt{3}$. Also bilden $g_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $g_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ nach 4.4.5 ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung 2-ter Ordnung $p(D)y = 0$.

Für die Wronski-Matrix an der Stelle 0 ergibt sich

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$M(0)^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$(M(0)^T)^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} v_1 & v_1 + 2v_2 \\ v_2 & 4v_1 - 3v_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} ((\lambda_2 - 1)v_1 - 2v_2)e^{\lambda_1 x} + ((1 - \lambda_1)v_1 + 2v_2)e^{\lambda_2 x} \\ (-4v_1 + (3 + \lambda_2)v_2)e^{\lambda_1 x} + (4v_1 - (3 + \lambda_1)v_2)e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.3.6. Vereinfachungen bei speziellen Anfangswerten.

Das hier vorgestellte Verfahren liefert für jedes Anfangswertproblem bei homogenen linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten die eindeutig bestimmte Lösung.
Manchmal kann man die Rechnung vereinfachen, wenn die Anfangswerte spezielle Bedingungen erfüllen.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Wenn es ein Polynom $q(X)$ vom Grade $d < n$ gibt mit $q(A)v = 0$, dann funktioniert das gerade beschriebene Verfahren auch mit diesem Polynom anstelle des charakteristischen Polynoms.
Wenn beispielsweise v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann leistet das Polynom $q(X) = X - \lambda$ vom Grad $d = 1$ das Gewünschte. Es gilt ja dann $q(A)v = (A - \lambda E)v = 0$.

6.3.7. Satz.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $q(X)$ ein Polynom vom Grade $d < n$ mit $q(A)v = 0$.
Es bezeichne $g_1, \ldots, g_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$q(D)y = 0,$$

und $M(x_0)$ seine Wronskimatrix im Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay; \quad y(x_0) = v$$

gegeben durch

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v & Av & \ldots & A^{d-1}v \end{array} \right) \left(M(x_0)^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix}.$$

Falls v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, kann man $q(X) = X - \lambda$ mit $d = 1$ wählen. Ein Fundamentalsystem von $q(D)y = 0$ besteht aus der Funktion $g(x) = e^{\lambda x}$ mit Wronski-Matrix $M(x_0) = (e^{\lambda x_0})$. Damit ergibt sich

6.3.8. Satz.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay; \quad y(x_0) = v$$

gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = v e^{\lambda(x-x_0)}.$$

Im Spezialfall $x_0 = 0$ gilt also

$$f(x) = v e^{\lambda x}.$$

6.3.9. Bemerkung.

Um zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ein Polynom $q(X)$ von möglichst kleinem Grad d zu finden, welches $q(A)v = 0$ erfüllt, kann man folgendermaßen vorgehen:
Man berechnet nacheinander die Vektoren $v, Av, A^2v, \ldots, A^dv$ und überprüft in jedem Schritt mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, ob sie linear abhängig sind. Wenn man eine lineare Relation der Form

$$A^dv + b_{d-1}A^{d-1}v + \cdots + b_1Av + b_0v = 0$$

gefunden hat, kann man das Polynom

$$q(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_1X + b_0$$

benutzen, um den Algorithmus durchzuführen.

6.3.10. Beispiel.

Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = Ay; \quad y(x_0) = v$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 2 \\ -9 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x_0 = 0.$$

Der Vektor

$$Av = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 2 \\ -9 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist offenbar linear unabhängig von v. Es gilt

$$A^2v = A(Av) = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 2 \\ -9 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Um diese Vektoren auf lineare Abhängigkeit zu überprüfen, benutzen wir den Gauß-Algorithmus, vgl. L 3.9.7. Dazu schreiben wir die Vektoren v, Av und A^2v zeilenweise in eine Matrix und versuchen, durch elementare Zeilenumformungen in der letzten Zeile eine Nullzeile zu erzeugen.
Es erweist sich als zweckmäßig, eine zusätzliche Spalte mit den Einträgen $v, \ldots, A^2v$ einzufügen, und auf diese alle Eliminationsschritte des Gauß-Algorithmus anzuwenden.
Es gilt

$$\begin{pmatrix} v^T \\ (Av)^T \\ (A^2v)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \\ 16 & 24 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir wenden den Gauß-Algorithmus also auf folgende Matrix an:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 2 & 3 & 1 & v \\ 6 & 9 & 2 & Av \\ 16 & 24 & 4 & A^2v \end{array}\right]$$

Im ersten Schritt erhalten wir

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 3\,Z_1: \\ Z_3 - 8\,Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 2 & 3 & 1 & v \\ 0 & 0 & -1 & Av - 3v \\ 0 & 0 & -4 & A^2v - 8v \end{array}\right],$$

und im zweiten

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - 4\,Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 2 & 3 & 1 & v \\ 0 & 0 & -1 & Av - 3v \\ 0 & 0 & 0 & A^2v - 8v - 4(Av - 3v) \end{array}\right].$$

Jetzt können wir das gesuchte Polynom in der rechten unteren Ecke der Matrix ablesen. Es gilt ja

$$A^2v - 8v - 4(Av - 3v) = A^2v - 4Av + 4v = 0,$$

also können wir

$$q(X) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$$

wählen.

Ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $q(D)y = 0$ wird nach 4.4.5 von den Funktionen $g_1(x) = e^{2x}$ und $g_2(x) = xe^{2x}$ gebildet. Für die Ableitungen gilt $g_1'(x) = 2e^{2x}$ und $g_2'(x) = (2x+1)e^{2x}$. Damit ergibt sich für die Wronskimatrix und ihre Invers-Transponierte im Punkte $x_0 = 0$:

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \left(M(0)^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x} + 2xe^{2x} \\ 3e^{2x} + 3xe^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

6.3.11. Bemerkungen.

1. Zu vorgegener Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ist das normierte Polynom $q(X)$ kleinsten Grades mit $q(A)v = 0$ eindeutig bestimmt, man nennt es das lokale Minmimalpolynom von A bzgl. v. Man kann zeigen, dass $q(X)$ ein Teiler des charakteristischen Polynoms $\chi_A(X)$ ist, insbesondere sind die Nullstellen von $q(X)$ unter den Eigenwerten von A zu finden.
2. Wenn das normierte Minimalpolynom von A bzgl. v den Grad n besitzt, dann stimmt es mit dem normierten charakteristischen Polynom überein.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Nach 6.2.4 bilden n Lösungen $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ genau dann ein Fundamentalsystem, d. h. eine Basis des Lösungsraumes, wenn für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.
Um ein Fundamentalsystem zu bestimmen, kann man sich daher ein $x_0 \in \mathbb{R}$ (am einfachsten ist $x_0 = 0$) und eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ des $\mathbb{R}^n$ vorgeben, und die n Anfangswertprobleme
$y' = Ay; y(x_0) = v_k, k = 1, \ldots, n$, lösen. Die Lösungen $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dieser Anfangswertprobleme bilden dann ein Fundamentalsystem.
Durch geeignete Wahl von $v_1, \ldots, v_n$ kann man versuchen, den Arbeitsaufwand zu minimieren.

Besonders einfach wird es, wenn die Matrix A diagonalisierbar ist; d.h. es gibt eine Basis des $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht, vgl. L 5.3.1.

6.4.1. Satz.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reell diagonalisierbare Matrix, und es sei $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A zu den (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann bilden die Funktionen $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $f_k(x) = v_k e^{\lambda_k x}$ ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

Nach 6.3.8 sind nämlich $f_1, \ldots, f_n$ Lösungen des Differentialgleichungssystems, und für ihre Wronskimatrix in $x_0 = 0$ ergibt sich

$$M(0) = (v_1 \ldots v_n).$$

Da $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden, ist $M(0)$ invertierbar, und nach 6.2.4 bilden $f_1, \ldots, f_n$ ein Fundamentalsystem.

6.4.2. Beispiel.

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und das zugehörige Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.
Für das charakteristische Polynom ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - XE) \\ &= (1-X)(3-X)(2-X) - 2 - 2(1-X) + 2(2-X) \\ &= -X^3 + 6X^2 - 11X + 6 \end{aligned}$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Da die Matrix drei verschiedene Eigenwerte hat, ist sie nach L 5.3.3 diagonalisierbar.

Als Eigenvektoren zu den drei Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ errechnet man

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also bilden die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ -e^x \end{pmatrix}; \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -2e^{2x} \\ -e^{2x} \end{pmatrix}; \quad f_3(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ -2e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem.

6.4.3. Beobachtung.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$. Dann gilt $f'(x) = Af(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also gilt auch $(f')'(x) = (Af)'(x) = Af'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das heißt die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $g(x) = f'(x) = Af(x)$ ist auch eine Lösung des Differentialgleichungssystems. Per Induktion sieht man, dass dann auch die Funktionen

$$f^{(k)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto f^{(k)}(x)$$

für $k \in \mathbb{N}$ Lösungen des Differentialgleichungssystems sind.
Falls f von der Form $f(x) = ve^{\lambda x}$ mit einem Eigenvektor v zum Eigenwert λ von A ist, dann gilt $f'(x) = \lambda ve^{\lambda x} = \lambda f(x)$, und die Funktionen f und f' sind linear abhängig.
Im anderen Extremfall kann es passieren, dass die Funktionen $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ linear unabhängig sind und folglich ein Fundamentalsystem bilden.

Wenn die Funktion f das Anfangswertproblem $y(x_0) = v$ löst, d. h. es gilt $f(x_0) = v$, dann löst $f^{(k)} = A^k f$ das Anfangswertproblem $y(x_0) = A^k v$. Also sind die Funktionen $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ linear unabhängig sind.

6.4.4. Satz.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x_0 \in \mathbb{R}$ und es sei $v \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass die Vektoren $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ linear unabhängig sind (d. h. die Vereinfachung aus 6.3.7 funktioniert nicht).
Es bezeichne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay; y(x_0) = v$, dann bilden die Funktionen

$$f, f', \ldots, f^{(n-1)}$$

ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

6.4.5. Beispiel.

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 0 & 1 & 2-X \end{pmatrix} = (2-X)^3$$

hat 2 als dreifache Nullstelle. Als v wählen wir den ersten Standardbasisvektor e_1 und erhalten

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A^2v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren v, Av und A^2v sind offensichtlich linear unabhängig. Gemäß 4.4.5 bilden die Funktionen

$$e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}$$

ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgeichung $\chi_A(D)y = 0$. Für die Wronskimatrix dieser drei Funktionen errechnet man

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & x^2e^{2x} \\ 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} & (2x+2x^2)e^{2x} \\ 4e^{2x} & (4x+4)e^{2x} & (4x^2+8x+2)e^{2x} \end{pmatrix},$$

insbesondere gilt

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Inverse von $M(0)$ und ihre Transponierte ergibt sich

$$M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad (M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist nach 6.3.4 die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay; y(0) = v = e_1$, gegeben durch

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} v & Av & A^2v \end{pmatrix} (M(0)^T)^{-1} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ xe^{2x} \\ x^2e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ xe^{2x} \\ x^2e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{2}x^2)e^{2x} \\ -xe^{2x} \\ -\frac{1}{2}x^2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Als weitere Lösungen erhalten wir

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1'(x) = \begin{pmatrix} 2(1 - \frac{1}{2}x^2)e^{2x} - xe^{2x} \\ -2xe^{2x} - e^{2x} \\ -x^2e^{2x} - xe^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2 - x - x^2)e^{2x} \\ (-1 - 2x)e^{2x} \\ (-x - x^2)e^{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f_2'(x) = \begin{pmatrix} 2(2 - x - x^2)e^{2x} + (-1 - 2x)e^{2x} \\ 2(-1 - 2x)e^{2x} - 2e^{2x} \\ 2(-x - x^2)e^{2x} + (-1 - 2x)e^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3 - 4x - 2x^2)e^{2x} \\ (-4 - 4x)e^{2x} \\ (-1 - 4x - 2x^2)e^{2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die drei Funktionen f_1, f_2, f_3 bilden jetzt ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

6.4.6. Bemerkungen.

1. Man kann zeigen, dass zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ linear unabhängig sind, wenn alle Eigenräume von A eindimensional sind, d. h. jeder Eigenwert hat die geometrische Vielfachheit 1, vgl. L 5.1.14.
2. Allgemein gilt folgendes: Wenn $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist, und $d \in \mathbb{N}$ minimal gewählt ist, so dass $v, Av, \ldots, A^d v$ linear abhängig sind, dann kann man durch Lösen des Anfangswertproblems $y' = Ay, y(x_0) = v$ und mehrfaches Differenzieren der Lösung genau d linear unabhängige (und nicht mehr) Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ bekommen. Um diese zu einem Fundamentalsystem zu ergänzen, kann man das Verfahren iterieren, und zwar mit Hilfe eines Vektors, der nicht im Erzeugnis von $v, Av, \ldots, A^{d-1}v$ liegt.

6.4.7. Beispiel.

In 6.3.10 hatten wir das Anfangswertproblem $y' = Ay; y(0) = v$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 2 \\ -9 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

betrachtet und die Lösung

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} (2+2x)e^{2x} \\ (3+3x)e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

berechnet. Durch Differenzieren erhalten wir die weitere Lösung

$$f_2(x) = f_1'(x) = \begin{pmatrix} 2(2+2x)e^{2x} + 2e^{2x} \\ 2(3+3x)e^{2x} + 3e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6+4x)e^{2x} \\ (9+6x)e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Da v, Av und A^2v linear abhängig sind, erhalten wir durch erneutes Differenzieren keine linear unabhängige Lösung, d. h. f_2' ist von f_1 und f_2 linear abhängig. Tatsächlich überträgt sich die in 6.3.10 gefundene Beziehung $A^2v = 4Av - 4v$ auf die Lösungen, d. h. es gilt $f_2' = 4f_2 - 4f_1$.
Um f_1 und f_2 zu einem Fundamentalsystem zu ergänzen, berechnen wir das charakteristische Polynom von A und erhalten

$$\chi_A(X) = (2-X)((-7-X)(8-X)+54) = (2-X)(X^2-X-2)$$

mit 2 als doppelter und -1 als einfacher Nullstelle. Als Eigenvektor zum Eigenwert -1 und zugehörige Lösung errechnet man

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f_3(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um zu entscheiden, ob f_1, f_2 und f_3 ein Fundamentalsystem bilden, berechnen wir ihre Wronski-Matrix im Punkte $x_0 = 0$

$$M(0) = \begin{pmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante errechnet man

$$\det M(0) = 6 + 6 - 9 - 4 = -1 \neq 0,$$

also bilden f_1, f_2 und f_3 ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

6.4.8. Bemerkung.

Das hier vorgestellte Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen bei homogenen linearen Differentialgleichungssystemen ist relativ neu und wird in den vorhandenen Lehrbüchern nicht behandelt.
Üblicherweise wird zuerst mit Hilfe von Hauptvektoren (oder verallgemeinerten Eigenvektoren) und der Jordan-Normalform, vgl. L.Z.4, ein Fundamentalsystem bestimmt, und anschliessend das Anfangswertproblem gelöst. Bei dem hier verfolgten Ansatz spart man sich die Berechnung eines Fundamentalsystems und löst die Anfangswertprobleme direkt.
Wenn man an einem Fundamentalsystem interessiert ist, dann ist der Arbeitsaufwand bei beiden Verfahren vergleichbar.

6.5. Normierte Fundamentalsysteme

6.5.1. Definition.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Ein Fundamentalsystem $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = Ay$ heißt normiert, wenn für seine Wronski-Matrix $M(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ gilt

$$M(0) = E \quad \text{(die } n \times n\text{-Einheitsmatrix)}.$$

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertproblemen ist das normierte Fundamentalsystem eines Differentialgleichungssystems eindeutig bestimmt.

6.5.2. Satz.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und es sei $M(x)$ die Wronski-Matrix eines Fundamentalsystems von Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$. Dann ist für jede invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auch

$$M(x) \cdot B$$

die Wronski-Matrix eines Fundamentalsystems von Lösungen; insbesondere ist

$$\tilde{M}\,(x) = M(x) \cdot M(0)^{-1}$$

die Wronski-Matrix des normierten Fundamentalsystems.

Beweis.

Dass $M(x)$ Wronski-Matrix eines Fundamentalsystems ist, bedeutet zweierlei:

$$M'(x) = A \cdot M(x)$$

(da jede Spalte von $M(x)$ der Differentialgleichung $y' = Ay$ genügt), und

$$\det M(x) \neq 0.$$

Für $M(x) \cdot B$ gilt

$$(M(x) \cdot B)' = M(x)' \cdot B = (A \cdot M(x)) \cdot B = A \cdot (M(x) \cdot B)$$

und

$$\det(M(x) \cdot B) = \det M(x) \cdot \det B \neq 0.$$

Also ist auch $M(x) \cdot B$ Wronski-Matrix eines Fundamentalsystems. Für $\tilde{M}\,(x) = M(x) \cdot M(0)^{-1}$ gilt $\tilde{M}\,(0) = M(0) \cdot M(0)^{-1} = E$, also ist $\tilde{M}\,(x)$ die Wronski-Matrix des normierten Fundamentalsystems. □

6.5.3. Satz.

Es sei $f_1, \ldots, f_n$ ein normiertes Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ und $M(x)$ seine Wronski-Matrix, dann gilt

$$M(x_1 + x_2) = M(x_1) \cdot M(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sowie

$$M(x)^{-1} = M(-x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ fest und $x \in \mathbb{R}$ variabel ist $M(x) \cdot M(x_0)$ Wronski-Matrix eines Fundamentalsystems nach 6.5.2. Andererseits ist $M(x + x_0)$ ebenfalls Wronski-Matrix, es gilt nämlich mit der Substitution $u = x + x_0$

$$M(x + x_0)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} M(x + x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, u} M(u) = A \cdot M(u) = A \cdot M(x + x_0)$$

und $\det M(x + x_0) \neq 0$. Für $x = 0$ stimmen beide Wronski-Matrizen überein

$$M(0) \cdot M(x_0) = E \cdot M(x_0) = M(0 + x_0).$$

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Anfangswertprobleme stimmen sie dann für alle $x \in \mathbb{R}$ überein, d. h. es gilt

$$M(x) \cdot M(x_0) = M(x + x_0).$$

Mit x_1 und x_2 statt x und x_0 gilt also

$$M(x_1) \cdot M(x_2) = M(x_1 + x_2).$$

Insbesondere gilt

$$M(x) \cdot M(-x) = M(x - x) = E,$$

und damit

$$M(x)^{-1} = M(-x).$$

□

6.5.4. Bemerkung.

Man kann in die Exponentialreihe $\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$ für X auch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einsetzen, und dadurch eine Exponentialfunktion für Matrizen definieren. Es stellt sich heraus, dass diese Reihe für jede Matrix A konvergiert, und dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{Ax} = \exp(Ax) = M(x),$$

dabei ist $M(x)$ die Wronski-Matrix des normierten Fundamentalsystems des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$. Insbesondere gilt $e^A = M(1)$, und die Aussage von 6.5.3 liest sich als

$$e^{A(x_1+x_2)} = e^{Ax_1} \cdot e^{Ax_2}.$$

Für nicht notwendig normierte Fundamentalsysteme ergibt sich

6.5.5. Satz.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und es sei $M(x)$ die Wronski-Matrix eines Fundamentalsystems von Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$. Dann gilt

$$M(x)^{-1} = M(0)^{-1} \cdot M(-x) \cdot M(0)^{-1}.$$

Beweis.

Nach 6.5.2 ist

$$\tilde{M}\,(x) = M(x) \cdot M(0)^{-1}$$

die Wronskimatrix des normierten Fundamentalsystems, und nach 6.5.3 gilt

$$\begin{aligned} M(0) \cdot M(x)^{-1} &= (M(x) \cdot M(0)^{-1})^{-1} = \tilde{M}\,(x)^{-1} \\ &= \tilde{M}\,(-x) = M(-x) \cdot M(0)^{-1}. \end{aligned}$$

Multiplikation auf beiden Seiten mit $M(0)^{-1}$ liefert das Ergebnis. □

6.5.6. Bemerkung.

Wenn man eine lineare Differentialgleichung höher Ordnung nach 6.1.3 in ein System 1. Ordnung überführt, dann sind die Wronski-Matrizen der einander entsprechenden Lösungen gleich. Also gilt 6.5.5 auch für die Wronski-Matrizen von linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung.
Das erspart bei der Variation der Konstanten sehr viel Arbeit, da man nicht die Wronski-Matrix $M(x)$ mit Funktionen als Einträgen, sondern nur die Wronski-Matrix $M(0)$ mit Zahlen als Einträgen invertieren muss.
Insbesondere heißt das auch, dass in der inversen Wronski-Matrix $M(x)^{-1}$ keine gebrochen rationalen Funktionen, sondern nur Produkte von Polynomen, Exponentialfunktionen und Ausdrücken in sin und cos auftreten.

6.5.7. Beispiel.

In 6.4.5 wurde die lineare Differentialgleichung

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

mit charakteristischen Polynom

$$p(X) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X-2)^3$$

behandelt. Ein Fundamentalsystem besteht aus den Funktionen

$$e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}$$

mit Wronskimatrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & x^2e^{2x} \\ 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} & (2x+2x^2)e^{2x} \\ 4e^{2x} & (4x+4)e^{2x} & (4x^2+8x+2)e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst $M(0)^{-1} \cdot M(-x)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2x} & -xe^{-2x} & x^2e^{-2x} \\ 2e^{-2x} & (-2x+1)e^{-2x} & (-2x+2x^2)e^{-2x} \\ 4e^{-2x} & (-4x+4)e^{-2x} & (4x^2-8x+2)e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2x} & -xe^{-2x} & x^2e^{-2x} \\ 0 & e^{-2x} & -2xe^{-2x} \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Um $M(x)^{-1}$ zu erhalten multiplizieren wir das Ergebnis von rechts mit $M(0)^{-1}$ und erhalten

$$M(x)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2x} & -xe^{-2x} & x^2e^{-2x} \\ 0 & e^{-2x} & -2xe^{-2x} \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+2x+2x^2)e^{-2x} & (-x-2x^2)e^{-2x} & \frac{1}{2}x^2e^{-2x} \\ (-2-4x)e^{-2x} & (1+4x)e^{-2x} & -xe^{-2x} \\ 2e^{-2x} & -2e^{-2x} & \frac{1}{2}e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Es empfiehlt sich eine Probe.

6.6. Variation der Konstanten

Wir betrachten ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem

$$y' = A(x)y + h(x)$$

mit stetigen Funktionen $A : J \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $h : J \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass wir schon ein Fundamentalsytem $f_1, \ldots, f_n : J \to \mathbb{R}^n$ des zugehörigen homogenen Systems bestimmt haben. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist dann gegeben durch

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit Hilfe der Wronski-Matrix

$$M(x) = (f_1(x) \ldots f_n(x))$$

und des Vektors $c = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ können wir auch schreiben

$$f(x) = M(x)c.$$

Für eine partikuläre Lösung $f_p : J \to \mathbb{R}^n$ des inhomogenen Systems machen wir wie in 3.3.7 und 5.2.1 den Ansatz

$$f_p(x) = M(x)c(x)$$

mit einer vektorwertigen Funktion $c : J \to \mathbb{R}^n$.
Eine kurze Überlegung zeigt, dass die Produktregel auch für Produkte von matrix- und vektorwertigen Funktionen gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} f_p'(x) &= (M(x)c(x))' = M'(x)c(x) + M(x)c'(x) \\ &= A(x)M(x)c(x) + M(x)c'(x) \\ &= A(x)f_p(x) + M(x)c'(x). \end{aligned}$$

Damit f_p dem inhomogenen Differentialgleichungssystem genügt, sollte man also $c(x)$ so wählen, dass

$$M(x)c'(x) = h(x) \quad \text{bzw.} \quad c'(x) = M(x)^{-1}h(x)$$

gilt.

6.6.1. Satz.

Gegeben sei das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = A(x)y + h(x)$$

mit stetigen Funktionen $A : J \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $h : J \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Weiterhin sei $f_1, \ldots, f_n : J \to \mathbb{R}^n$ ein Fundamentalsytem des zugehörigen homogenen Systems mit Wronski-Matrix $M(x)$. Die vektorwertige Funktion $c : J \to \mathbb{R}^n$ sei so bestimmt, dass für ihre Ableitung gilt

$$c'(x) = M(x)^{-1}h(x).$$

Dann ist $f_p : J \to \mathbb{R}^n$ mit

$$f_p(x) = M(x)c(x)$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems.

6.6.2. Beispiel.

Wir suchen eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 2 \\ -9 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x \\ x \end{pmatrix}.$$

In 6.4.7 haben wir ein Fundamentalsystem des homogenen Systems berechnet. Seine Wronski-Matrix ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} (2+2x)e^{2x} & (6+4x)e^{2x} & e^{-x} \\ (3+3x)e^{2x} & (9+6x)e^{2x} & e^{-x} \\ e^{2x} & 2e^{2x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung von $M(x)^{-1}$ benutzen wir 6.5.5, also die Beziehung $M(x)^{-1} = M(0)^{-1}M(-x)M(0)^{-1}$.

Es gilt

$$M(0) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} & M(0)^{-1} M(-x) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2-2x)e^{-2x} & (6-4x)e^{-2x} & e^x \\ (3-3x)e^{-2x} & (9-6x)e^{-2x} & e^x \\ e^{-2x} & 2e^{-2x} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+2x)e^{-2x} & 4xe^{-2x} & 0 \\ -xe^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Matrix multiplizieren wir von rechts mit $M(0)^{-1}$ und erhalten

$$\begin{aligned} & M(x)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (1+2x)e^{-2x} & 4xe^{-2x} & 0 \\ -xe^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-2x} & -2e^{-2x} & (3+2x)e^{-2x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} & (-1-x)e^{-2x} \\ 3e^x & -2e^x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2e^{-2x} & -2e^{-2x} & (3+2x)e^{-2x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} & (-1-x)e^{-2x} \\ 3e^x & -2e^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3x+2x^2)e^{-2x} \\ (-x-x^2)e^{-2x} \\ e^x \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration erhalten wir als eine mögliche Wahl

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{4})e^{-2x} \\ (\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2})e^{-2x} \\ e^x(\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x) \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \begin{pmatrix} (2+2x)e^{2x} & (6+4x)e^{2x} & e^{-x} \\ (3+3x)e^{2x} & (9+6x)e^{2x} & e^{-x} \\ e^{2x} & 2e^{2x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{4})e^{-2x} \\ (\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2})e^{-2x} \\ e^x(\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. Fourier-Methoden

7.1. Periodische Funktionen

In der Physik und in der Technik spielen periodische Funktionen eine große Rolle, etwa bei der Beschreibung von Schwingungsvorgängen. Die bekanntesten Beispiele für periodische Funktionen bilden die Sinus- und die C osinusfunktion. Auf den französischen Ingenieur J. B. Fourier geht die Idee zurück, beliebige periodische Funktionen durch unendliche Summen, die aus Sinus- und Cosinustermen bestehen, darzustellen. Er stellte dies 1807 auf einem Vortrag über Wärmeausbreitung und periodische Temperaturverteilung vor. Bereits früher war postuliert worden, dass der Klang eines Musikinstrumentes durch eine Grundschwingung der Form

$$a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

und Oberschwingungen der Form

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

bestimmt sein sollte.

7.1.1. Definition.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn ein $T > 0$ existiert mit

$$f(x + T) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Zahl T heißt die Periode von f. Man sagt auch f ist T-periodisch.

7.1.2. Beispiele.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ haben $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ die Periode $\frac{2\pi}{n}$.
2. Hat f die Periode T, dann hat es auch die Periode $k \cdot T$ für $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere sind $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ auch 2π-periodisch.
   Periodenlängen sind also nicht eindeutig.
3. Hat f die Periode T, dann hat $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\widetilde{f}(x) = f\left(x \cdot \frac{T}{2\pi}\right)$$

   die Periode 2π. Es gilt nämlich

$$\widetilde{f}(x+2\pi) = f\left((x+2\pi)\frac{T}{2\pi}\right) = f\left(x\frac{T}{2\pi} + T\right) = f\left(x\frac{T}{2\pi}\right) = \widetilde{f}(x).$$

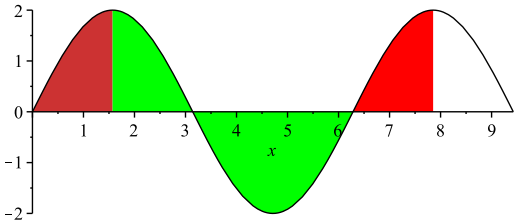
   Für die Theorie genügt es daher, sich auf die Untersuchung von Funktionen der Periodenlänge 2π zu beschränken.

7.1.3. Satz.

1. *Mit den T-periodischen Funktionen f und g und $c \in \mathbb{R}$ sind $f+g, cf, f \cdot g$, und $\frac{f}{g}$ falls $g \neq 0$ ebenfalls T-periodisch. Insbesondere bilden die Funktionen mit fester Periode T einen Untervektorraum des Raumes aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.*
2. *Falls eine T-periodische Funktion integrierbar ist, dann gilt*

$$\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_c^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

   für $c \in \mathbb{R}$.



7.2. Skalarprodukte in Funktionenräumen

7.2.1. Erinnerung.

Ein Skalarprodukt, vgl. L 2.6.2, auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle\,|\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, so dass für alle $f, g, h \in V$ und alle $c \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\langle f \,|\, g\rangle = \langle g \,|\, f\rangle$
2. $\langle f \,|\, f\rangle \geqq 0 \quad$ und $\quad \langle f \,|\, f\rangle = 0 \iff f = 0$
3. $\langle f \,|\, g + h\rangle = \langle f \,|\, g\rangle + \langle f \,|\, h\rangle$
4. $c\,\langle f \,|\, g\rangle = \langle c\,f \,|\, g\rangle = \langle f \,|\, c\,g\rangle$

Mit Hilfe des Skalarproduktes setzen wir $\|f\| := \sqrt{\langle f \,|\, f\rangle}$
und nennen dies die Norm von f.
Zwei Elemente $f, g \in V$ heißen orthogonal (oder senkrecht) wenn gilt

$$\langle f \,|\, g\rangle = 0.$$

7.2.2. Satz.

Auf dem Vektorraum aller stetigen Funktionen einer festen Periode $T > 0$ wird durch

$$\langle f \,|\, g\rangle = \int_0^T f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

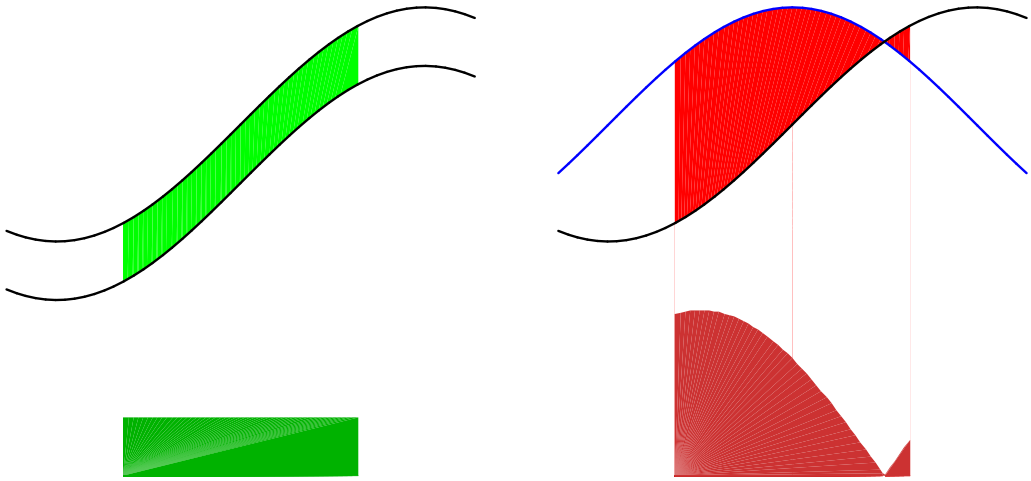
ein Skalarprodukt definiert.

Alle Eigenschaften eines Skalarproduktes ergeben sich unmittelbar aus den Rechenregeln für Integrale. Nur um zu zeigen, dass aus $\langle f \,|\, f\rangle = 0$ folgt, dass auch $f = 0$ gilt, muss man die Stetigkeit von f ausnutzen. (Beweis als Übung.)

7.2.3. Bemerkung.

Skalarprodukte wie das jetzt eingeführte benutzt man, um Abstände zwischen Funktionen zu definieren — das ist wichtig, wenn man Funktionen durch (trigonometrische) Polynome approximieren (annähern) will.

Der Abstand zwischen f und g wird definiert als $\|f - g\|$:



7.2.4. Orthogonalitätsrelationen.

Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1. $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 2\,\pi & \text{falls } n = k = 0, \\ \pi & \text{falls } n = k \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
2. $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,\sin(k\,x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$
3. $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\,\sin(k\,x)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \pi & \text{falls } n = k \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit anderen Worten:
Die (nicht abbrechende) Folge von Funktionen
$1, \cos(x), \sin(x), \cos(2\,x), \sin(2\,x), \ldots, \cos(j\,x), \sin(j\,x), \ldots$ bildet ein Orthogonalsystem im Raum der stetigen 2π-periodischen Funktionen, vgl. L 2.9.8.

Beweis.

Falls $k = 0$ oder $n = 0$ gilt, ist das klar. Wir können also annehmen $k, n \neq 0$. Mit partieller Integration findet man

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}\,x \\
&\quad= \left[\frac{1}{n}\sin(n\,x)\,\cos(k\,x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\sin(n\,x)\,(-k\sin(k\,x))\,\mathrm{d}\,x \\
&\quad= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{k}{n}\sin(n\,x)\,\sin(k\,x)\,\mathrm{d}\,x \\
&\quad= \left[-\frac{k}{n^2}\cos(n\,x)\,\sin(k\,x)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{k^2}{n^2}\cos(n\,x)\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}\,x \\
&\quad= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{k^2}{n^2}\cos(n\,x)\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}\,x.
\end{aligned}$$

Also gilt $\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}\,x = 0,$

und im Fall $k \neq n$ folgt jetzt das gewünschte Ergebnis.

Für $k = n$ gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n\,x))^2\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n\,x))^2\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - (\cos(n\,x))^2)\,\mathrm{d}\,x,$$

und damit

$$2\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n\,x))^2\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\,x = 2\pi.$$

Die übrigen Fälle werden analog behandelt. □

Mit Hilfe dieses Orthogonalsystems kann man herauszufinden, wie sich eine gegebene 2π-periodische Funktion in die Grundfrequenz und deren Vielfache zerlegt:

7.2.5. Satz.

Für ein trigonometrisches Polynom

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{N} a_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{N} b_j \sin(j\,x)$$

mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\,\langle \cos(k\,x) \,|\, f\rangle \quad \textit{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\,\langle \sin(k\,x) \,|\, f\rangle\,.$$

Mit anderen Worten:
Man erhält den Koeffizienten, mit dem die Funktion $\cos(k\,x)$ (bzw. $\sin(k\,x)$) in die Linearkombination f eingeht, (bis auf einen Faktor) als Skalarprodukt von $\cos(k\,x)$ (bzw. $\sin(k\,x)$) mit der Funktion f.

Beweis.

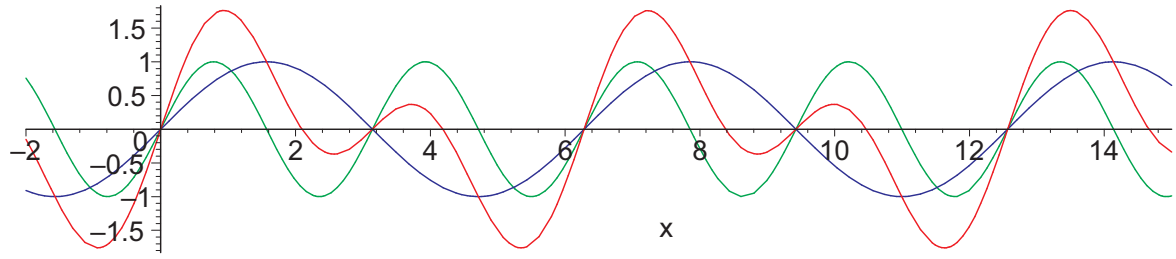
Wir berechnen $\langle \cos(k\,x) \,|\, f\rangle\,, k \neq 0$, für $\langle \sin(k\,x) \,|\, f\rangle$ geht das analog:

$$\begin{aligned}
\langle \cos(k\,x) \,|\, f\rangle &= \left\langle \cos(k\,x) \,\middle|\, \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{N} a_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{N} b_j \sin(j\,x) \right\rangle \\
&= \frac{a_0}{2}\,\langle \cos(k\,x) \,|\, 1\rangle + \sum_{j=1}^{N} a_j\,\langle \cos(k\,x) \,|\, \cos(j\,x)\rangle \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{N} b_j\,\langle \cos(k\,x) \,|\, \sin(j\,x)\rangle \\
&= \pi\,a_k\,,
\end{aligned}$$

wie man mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen 7.2.4 erkennt. □

7.2.6. Beispiel.

In L 2.8.6 wurde das folgende Beispiel betrachtet



$f(x) = \sin(x) + \sin(2\,x)$

Nach 7.2.5 gilt dann

$$\frac{1}{\pi}\,\langle \sin(x)\,|\,f\rangle \;=\; \frac{1}{\pi}\,\langle \sin(2\,x)\,|\,f\rangle \;=\; 1$$

und

$$\langle \sin(j\,x)\,|\,f\rangle = \langle \cos(k\,x)\,|\,f\rangle = 0$$

für $j \geqq 3, k \in \mathbb{N}_0$.

7.3. Fourier-Reihen

7.3.1. Definition.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine integrierbare 2π-periodische Funktion. Dann heißen

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(j\,x)\,\mathrm{d}\,x$$

für $j \in \mathbb{N}_0$ und

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(j\,x)\,\mathrm{d}\,x$$

für $j \in \mathbb{N}$ die Fourier-Koeffizienten von f.
Die trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j\cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j\sin(j\,x).$$

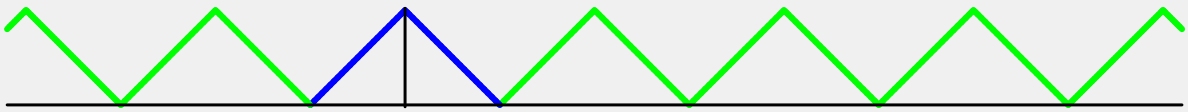
heißt die Fourier-Reihe von f.

7.3.2. Bemerkungen.

1. Aus der Integrierbarkeit von f folgt, dass alle Fourier-Koeffizienten existieren.
2. Die Fourier-Reihe von f ist zunächst nur ein formaler Ausdruck, da nichts über ihre Konvergenz gesagt wird.
3. Die Definition der Fourier-Koeffizienten und der Fourier-Reihe ist durch die Verhältnisse bei trigonometrischen Polynomen, vgl. 7.2.5, motiviert.

7.3.3. Beispiel (Sägezahnfunktion).

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqq \pi$ durch $f(x) = \pi - |x|$ gegeben ist:



Es gilt also

$$f(x) = f(x-2k\pi) = \pi - |x-2k\pi| \quad \text{für} \quad (2k-1)\pi < x \leqq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Für die Fourier-Koeffizienten ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0\cdot x)\,(\pi - |x|)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{\pi}\,[\pi x]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}\,x = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\cdot x)\,(\pi - |x|)\;\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\cdot x)\,\pi\;\mathrm{d}\,x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\cdot x)\,|x|\;\mathrm{d}\,x \\
&= 0 - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(n\cdot x)\,x\;\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos(n\cdot x)\,x\;\mathrm{d}\,x \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(n\cdot x)\,x\;\mathrm{d}\,x \qquad [\text{da } \cos(n\cdot x)\,x \text{ ungerade}] \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[\sin(n\cdot x)\,x\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(n\cdot x)\;\mathrm{d}\,x \\
&= 0 - \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos(n\cdot x)\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\,\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \neq 0 \text{ gerade.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\,(\pi - |x|)\;\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{\pi}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\cdot x)\;\mathrm{d}\,x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\cdot x)\,|x|\;\mathrm{d}\,x \\
&= 0 - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(n\cdot x)\,x\;\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin(n\cdot x)\,x\;\mathrm{d}\,x \\
&= 0 \qquad [\text{da } \sin(n\cdot x)\,x \text{ gerade}]
\end{aligned}
$$

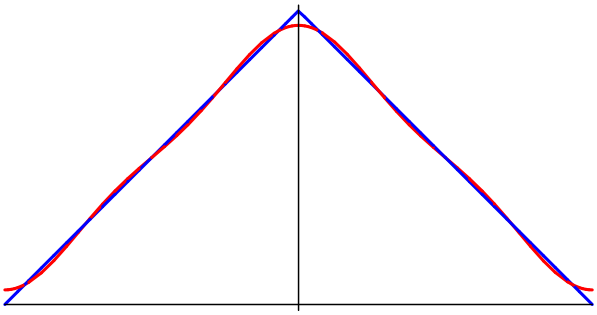
Für die Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion erhalten wir also:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^2\pi}\cos((2m+1)x)$$

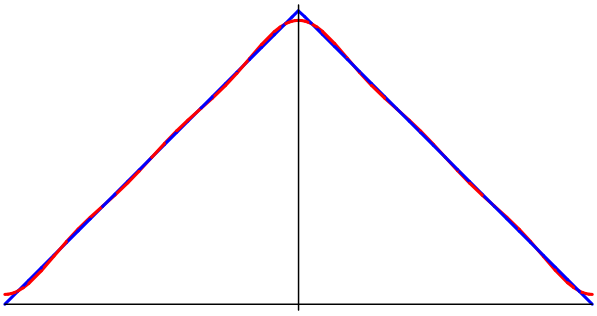
Die N-ten Fourier-Polynome $f_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{N} a_j \cos(j\,x)$ nähern sich für großes N immer besser an f an.
Schon f_3 liefert mit

$$f_3(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x) + \frac{4}{9\,\pi} \cdot \cos(3\,x)$$

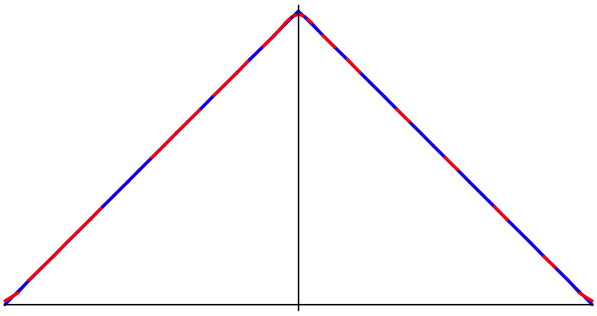
eine ganz gute Näherung für f:



Noch besser ist $f_5(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x) + \frac{4}{9\,\pi} \cdot \cos(3\,x) + \frac{4}{25\,\pi} \cdot \cos(5\,x)$



und f_{15} ist kaum mehr von f zu unterscheiden:



7.3.4. Satz.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine* 2π*-periodische Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

1. f *ist bis auf endlich viele Ausnahmestellen in* $[-\pi, \pi]$ *stetig differenzierbar.*
2. *An jeder Ausnahmestelle* x_0 *existieren die einseitigen Grenzwerte* $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0 + 0} f'(x)$ *und* $\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x)$.

Dann gilt:

1. *Die Fourier-Reihe von* f *konvergiert an jeder Stelle* x*, an der* f *stetig ist, gegen* $f(x)$.
2. *An einer Unstetigkeitsstelle* x_0 *von* f *konvergiert die Fourier-Reihe von* f *gegen das arithmetische Mittel*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)\right).$$

7.4. Eigenschaften von Fourier-Reihen

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion. Wir schreiben

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,x)$$

für die Fourier-Reihe von f, unabhängig davon, ob die Fourier-Reihe konvergiert oder nicht.

7.4.1. Satz.

Die Funktionen f und g seien 2π-periodisch, und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aus

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,x)$$

und

$$g(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{\infty} d_j \sin(j\,x)$$

folgt

$$(\alpha f + \beta g)(x) \sim \frac{\alpha\,a_0 + \beta\,c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha\,a_j + \beta\,c_j) \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha\,b_j + \beta\,d_j) \sin(j\,x).$$

Mit anderen Worten: Die Fourier-Reihe der Linearkombination zweier Funktionen ist die Linearkombination der Fourier-Reihen.

7.4.2. Satz.

Für jede 2π-periodische Funktion f gilt:

1. *Die Fourier-Reihe von f ist genau dann eine reine Cosinus-Reihe, wenn f gerade ist, d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt*

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(jx)\,\mathrm{d}\,x.$$

2. *Die Fourier-Reihe von f ist genau dann eine reine Sinus-Reihe, wenn f ungerade ist, d.h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt*

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(jx)\,\mathrm{d}\,x.$$

Jede Funktion lässt sich eindeutig als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen, indem man schreibt

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Für die Fourier-Reihe von f ergibt sich:

7.4.3. Satz.

Es sei

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,x),$$

dann gilt

$$\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,x)$$

und

$$\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \sim \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,x).$$

7.4.4. Beispiel.

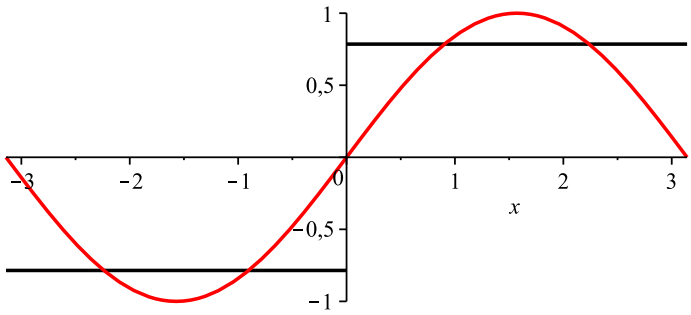
Wir betrachten die Rechteck-Funktion, die gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{für } x \in \{-\pi, 0, \pi\} \\ \frac{\pi}{4} & \text{für } 0 < x < \pi \end{cases}$$

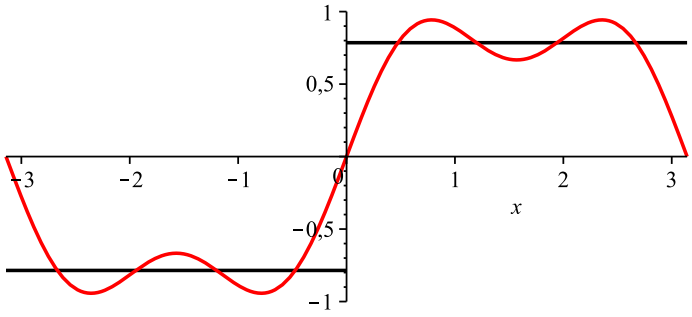
und 2π-periodische Fortsetzung, also $f(x) = f(x - 2k\pi)$ falls $(2k-1)\pi < x \leqq (2k+1)\pi$. Die Fourier-Reihe der ungeraden Funktion f ist eine reine Sinusreihe, und für die Fourier-Koeffizienten gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4}\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x \\ &= -\frac{1}{2n}[\cos(nx)]_0^{\pi} = -\frac{1}{2n}((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

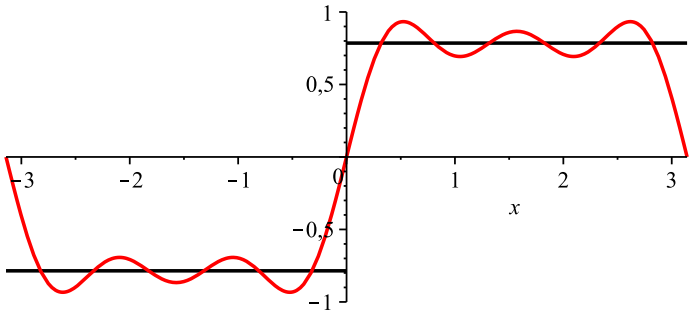
Das erste Fourier-Polynom ist $f_1(x) = \sin x$



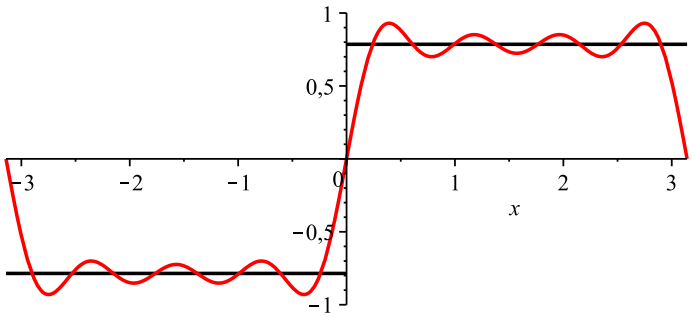
und das dritte ist $f_3(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$



Weiterhin erhalten wir $f_5(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x)$



sowie $f_7(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x)$



7.4.5. Bemerkung.

Gelegentlich kann man Fourier-Reihen benutzen, um Grenzwerte von Zahlenreihen zu berechnen.
So gilt etwa nach 7.4.4 für $0 < x < \pi$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Speziell für $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Für $x = \frac{\pi}{3}$ erhalten wir analog

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \mp \cdots\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Nach 7.3.3 gilt für $-\pi \leqq x \leqq \pi$

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2\pi} = \pi - |x|$$

bzw.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \left|\frac{\pi x}{4}\right|.$$

Speziell für $x = 0$ ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

und damit

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7.4.6. Satz (Gibbs-Phänomen).

Die 2π-periodische Funktion sei stückweise stetig differenzierbar. Wir setzen

$$\delta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}\, t \approx 1,18$$

Die Funktion f sei unstetig an der Stelle x_0, und es sei M_N bzw. m_N die Maximal- bzw. Minimalstelle des N-ten Fourier-Polynoms f_N von f, die x_0 am nächsten liegt. Dann gilt

$$\lim_{N \to \infty} \left(f_N(M_N) - f_N(m_N) \right) = \delta \cdot \left| \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \right|.$$

Mit anderen Worten: Die N-ten Fourier-Polynome von f überspringen für großes N den Sprung von f an einer Unstetigkeitsstelle um 18%.

7.4.7. Satz.

Die 2π-periodische Funktion sei stetig und stückweise stetig differenzierbar, und es gelte

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\, x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\, x).$$

Dann gilt

$$f'(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} -j a_j \sin(j\, x) + \sum_{j=1}^{\infty} j b_j \cos(j\, x).$$

Anders gesagt: Die Fourier-Reihen von stetigen Funktionen können gliedweise differenziert werden.

7.4.8. Beispiel.

Nach 7.3.3 gilt für die Sägezahnfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \pi - |x - 2k\pi|$ für $(2k-1)\pi < x \leqq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2\pi}.$$

Diese Funktion ist stetig und stückweise stetig differenzierbar, und für ihre Ableitung gilt:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{für } (2k-1)\pi < x < 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

In den Punkten $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ist f nicht differenzierbar, aber die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f' existieren. Also gilt

$$f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{4(2n+1)\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{4\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}.$$

Das passt zu 7.4.4, wie man durch Multiplikation mit $-\frac{\pi}{4}$ sieht.
Die Funktion f' ist unstetig, daher ist 7.4.7 nicht anwendbar. Die Ableitung der Rechteckfunktion f' ist an allen Stellen, an denen sie existiert, gleich Null, und an allen Ausnahmestellen stimmen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Ableitung überein. Also sollte die Fourier-Reihe von f'' die Nullreihe sein. Gliedweises Ableiten der Fourier-Reihe von f' liefert jedoch

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{4\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}\right)' = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \cos((2n+1)x),$$

und diese Reihe konvergiert nur für $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Das folgt daraus, dass die Folge $(\cos((2n+1)x))_{n\in\mathbb{N}}$ nur für diese x eine Nullfolge ist, und damit für alle anderen $x \in \mathbb{R}$ das notwendige Konvergenzkriterium aus A 1.9.1 nicht erfüllt ist.

7.4.9. Satz.

Die 2π-periodische Funktion sei stückweise stetig differenzierbar, und es gelte

$$f(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,x),$$

d.h. $a_0 = 0$. *Dann ist*

$$F(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j} \sin(j\,x) + \sum_{j=1}^{\infty} -\frac{b_j}{j} \cos(j\,x)$$

die Fourier-Reihe einer Stammfunktion von f.

7.4.10. Bemerkung.

Im allgemeinen sind die Stammfunktionen einer periodischen Funktion nicht wieder periodisch. Das sieht man schon am Beispiel einer konstanten Funktion, die nicht die Nullfunktion ist. Die Bedingung $a_0 = 0$ besagt, dass das bestimmte Integral von f über eine volle Periode gleich Null ist. Aus dieser Bedingung folgt, dass f eine periodische Stammfunktion besitzt.

7.4.11. Beispiel.

Wir betrachten wieder die Sägezahnfunktion aus 7.3.3 mit

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2\pi}.$$

Wegen $a_0 = \pi \neq 0$ hat f keine periodische Stammfunktion. Wir betrachten stattdessen $g = f - \frac{\pi}{2}$ mit $g(x) = \frac{\pi}{2} - |x - 2k\pi|$ für $(2k-1)\pi < x \leqq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ mit Fourier-Reihe

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2\pi}.$$

Es ist dann

$$G(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3\pi}$$

die Fourier-Reihe einer Stammfunktion von g.

Die Funktion G ist ungerade, insbesondere gilt $G(0) = 0$. Für $0 < x < \pi$ gilt $G(x) = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} + c$. Als Stammfunktion einer stetigen Funktion ist G stetig, also gilt $\lim_{x\to 0} G(x) = c = G(0) = 0$, und

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi(x-2k\pi)}{2} - \dfrac{(x-2k\pi)^2}{2} & \text{für } 2k\pi < x \leqq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\pi(x-2k\pi)}{2} + \dfrac{(x-2k\pi)^2}{2} & \text{für } (2k-1)\pi < x \leqq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Wenn wir $x = \frac{\pi}{2}$ einsetzen, ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\cdot(-1)^n}{(2n+1)^3\pi} = \frac{\pi^2}{8}$$

bzw.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

7.5.1. Bezeichnung.

Für $N \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$V_N = \{\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \cdots + \alpha_N \cos(N\,x) + \beta_1 \sin x + \cdots + \beta_N \sin(N\,x) \mid \alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}\}$$

den Vektorraum aller trigonometrischen Polynome der Ordnung höchstens N.

Gemäß 7.2.4 bilden die Funktionen

$$1, \cos x, \ldots, \cos(N\,x), \sin x, \ldots, \sin(N\,x)$$

eine Orthogonalbasis von V_N, insbesondere hat V_N die Dimension $2N+1$.

7.5.2. Definition.

Eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt quadratintegrabel wenn gilt

$$\|f\|^2 = \langle f \mid f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}\,x < \infty,$$

anders gesagt: Die Norm von f im Sinne von 7.2.1 ist eine (endliche) reelle Zahl.

Jede stückweise stetig differenzierbare Funktion ist quadratintegrabel.

7.5.3. Satz.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine quadratintegrable* 2π*-periodische Funktion. Dann ist das* N*-te Fourier-Polynom*

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{N} a_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{N} b_j \sin(j\,x),$$

von f *die beste Approximation von* f *an* V_N*, d. h. es gilt*

$$\|f - f_N\| \leqq \|f - g\|$$

für alle $g \in V_N$*.*

Beweis.

Da die Norm mit Hilfe eines Skalarproduktes definiert ist, vgl. 7.2.1, können wir statt $\|f - g\|$ auch $\langle f - g \,|\, f - g \rangle$ für $g \in V_N$ minimieren. Mit

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \sin(j\,x)$$

gilt

$$\begin{aligned} \langle g \,|\, g \rangle \quad &= \left\langle \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \sin(j\,x) \right| \\ &\qquad \left. \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cos(k\,x) + \sum_{k=1}^{N} \beta_k \sin(k\,x) \right\rangle \\ &= \pi \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{N} \pi \alpha_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \pi \beta_j^2 \end{aligned}$$

wie man mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen 7.2.4 erkennt.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\langle f \,|\, g \rangle &= \left\langle f \,\middle|\, \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \sin(j\,x) \right\rangle \\
&= \left\langle f \,\middle|\, \frac{\alpha_0}{2} \right\rangle + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \,\langle f \,|\cos(j\,x)\rangle + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \,\langle f \,|\sin(j\,x)\rangle \\
&= \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(j\,x)\,\mathrm{d}\,x \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(j\,x)\,\mathrm{d}\,x.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle f-g \,|\, f-g \rangle &= \langle f \,|\, f \rangle - 2\,\langle f \,|\, g \rangle + \langle g \,|\, g \rangle \\
&= \langle f \,|\, f \rangle - \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x - \sum_{j=1}^{N} 2\alpha_j \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(j\,x)\,\mathrm{d}\,x \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{N} 2\beta_j \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(j\,x)\,\mathrm{d}\,x + \pi\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{N} \pi\alpha_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \pi\beta_j^2 \\
&=: H(\alpha_0, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \ldots, \beta_N).
\end{aligned}$$

Um die jetzt das minimale g zu finden, können wir auch die von den $2N+1$ Variablen $\alpha_0, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \ldots, \beta_N$ abhängige reellwertige Funktion H minimieren. Dazu benutzen wir das notwendige Kriterium aus A 4.5.1, d. h. wir setzen alle partiellen Ableitungen von H gleich Null.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \alpha_0} &= -\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \pi\alpha_0 \\
\frac{\partial H}{\partial \alpha_k} &= -2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(k\,x)\,\mathrm{d}\,x + 2\pi\alpha_k \quad \text{für } k = 1,\ldots,N \\
\frac{\partial H}{\partial \beta_k} &= -2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(k\,x)\,\mathrm{d}\,x + 2\pi\beta_k \quad \text{für } k = 1,\ldots,N.
\end{aligned}$$

Diese partiellen Ableitungen sind genau dann alle gleich Null, wenn $\alpha_0,\ldots,\alpha_N,\beta_1,\ldots,\beta_N$ die Fourier-Koeffizienten von f sind. Damit ist das N-te Fourierpolynom als einziger Kandidat für ein Minimum erkannt. Durch Betrachtung der Hesse-Matrix, vgl. A 4.5.5, sieht man, dass tatsächlich ein Minimum vorliegt. □

7.5.4. Satz.

Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei quadratintegrabel, dann gilt für die Fourierkoeffizienten von f die folgende Besselsche Ungleichung

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}\,x \geqq \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{j=1}^{N}(a_j^2 + b_j^2).$$

Für $N \to \infty$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}\,x = \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{j=1}^{\infty}(a_j^2 + b_j^2).$$

Beweis.

Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von 7.5.3 gilt

$$\begin{aligned}
0 \;&\leqq \langle f - f_N \,|\, f - f_N \rangle \;= H(a_0, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) \\
&= \langle f \,|\, f \rangle \;- a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x - \sum_{j=1}^{N} 2a_j \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(j\,x)\,\mathrm{d}\,x \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{N} 2b_j \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(j\,x)\,\mathrm{d}\,x + \pi\frac{a_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{N} \pi\, a_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \pi\, b_j^2 \\
&= \langle f \,|\, f \rangle \;- \pi\, a_0^2 - \sum_{j=1}^{N} 2\pi\, a_j^2 - \sum_{j=1}^{N} 2\pi\, b_j^2 + \pi\frac{a_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{N} \pi\, a_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \pi\, b_j^2 \\
&= \langle f \,|\, f \rangle \;- \pi\frac{a_0^2}{2} - \sum_{j=1}^{N} \pi\, a_j^2 - \sum_{j=1}^{N} \pi\, b_j^2,
\end{aligned}$$

und damit die Besselsche Ungleichung. Den Beweis der Parsevalschen Gleichung überlassen wir den Mathematikern. □

7.5.5. Beispiel.

Für die Sägezahnfunktion aus 7.3.3 gilt

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2\pi} = \pi - |x|.$$

Für die Norm dieser Funktion erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^2\,\mathrm{d}\,x &= 2\int_0^{\pi} (\pi^2 - 2\pi x + x^2)\,\mathrm{d}\,x = 2\left[\pi^2 x - \pi x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} \\
&= 2\left(\pi^3 - \pi^3 + \frac{1}{3}\pi^3\right) \;= \frac{2}{3}\pi^3 \\
&= \pi\frac{\pi^2}{2} + \pi\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n+1)^2\pi}\right)^2 = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}
\end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Es ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Durch wiederholte Integration der Sägezahnfunktion kann man mit dieser Methode auch die Werte der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

für gerades k ausrechnen. Für ungerades k sind die Werte dieser Reihen unbekannt.

7.5.6. Satz.

Für eine quadratintegrable 2π-periodische Funktion f und ihre Fourier-Polynome f_N, $N \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\lim_{N \to \infty} \|f - f_N\| = 0.$$

Man sagt auch: Die Fourier-Polynome von f konvergieren im quadratischen Mittel gegen f.

Der Beweis ergibt sich, indem man die Parsevalsche Gleichung in die im Beweis von 7.5.4 hergeleitete Ungleichung einsetzt.

7.5.7. Bemerkung.

Konvergenz im quadratischen Mittel bedeutet, dass die Fläche zwischen den Graphen von f und f_N für wachsendes N immer kleiner wird, und beim Grenzübergang gegen Unendlich schließlich gegen Null geht. Dabei bewirkt das Quadrat in

$$\|f - f_N\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_N(x))^2 \, \mathrm{d}\, x,$$

dass große Abstände zwischen $f(x)$ und $f_N(x)$ stärker "bestraft" werden als kleine.
Es kann Ausnahmepunkte $x \in [-\pi, \pi]$ geben, an denen $f_N(X)$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert, da das Verhalten an einzelnen Punkten keinen Einfluss auf das Integral hat.

7.6. Komplexe Fourier-Reihen

Nach der Formel von Euler und de Moivre, vgl. A 1.14.18, gilt

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Diese Tatsache eröffnet einen komplexen Zugang zur Theorie der Fourier-Reihen. Sinnvollerweise betrachtet man gleich komplexwertige 2π-periodische Funktion. Als Definitionsbereich behält man allerdings die reellen Zahlen bei. Man sagt dann, eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist stetig, differenzierbar, etc., wenn Real- und Imaginärteil von f stetig, differenzierbar, etc. sind. Bestimmte Integrale über f werden berechnet, indem man Real- und Imaginärteil getrennt integriert.

7.6.1. Definition.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine integrierbare 2π-periodische Funktion. Dann heißen

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}\, x$$

für $k \in \mathbb{Z}$ die komplexen Fourier-Koeffizienten von f.

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

heißt das N-te komplexe Fourier-Polynom von f für $N \in \mathbb{N}$, und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

heißt die komplexe Fourier-Reihe von f. Man schreibt auch

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

7.6.2. Bemerkungen.

1. Die komplexen Fourier-Koeffizienten sind formal einfacher gebaut als die reellen, da nur eine Sorte von Integralen auftritt und der Index 0 nicht besonders behandelt werden muss.
2. Bei der Berechnung von c_k ist es wichtig, auf das Minuszeichen in e^{-ikx} zu achten.
3. Da für die komplexe Exponentialfunktion die gleichen Ableitungsregeln gelten wie für die reelle, vgl. 4.3.5, kann man bei der Berechnung von komplexen Fourier-Koeffizienten die üblichen Integrationsregeln, insbesondere partielle Integration, anwenden.

7.6.3. Satz.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eine* 2π*-periodische Funktion mit Fourier-Reihe*

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Dann ist f *genau dann reellwertig, wenn gilt* $c_{-k} = \overline{c}_k$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.
Wenn das erfüllt ist, bestehen die folgenden Beziehungen zwischen den reellen und den komplexen Fourier-Koeffizienten:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

für $k \in \mathbb{N}$, *bzw.*

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k})$$

für $k \in \mathbb{N}$.

7.6.4. Beispiel.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $f(x) = e^x$ für $-\pi < x \leqq \pi$ und 2π-periodische Fortsetzung. Für die komplexen Fourier-Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx} \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ik)x} \,\mathrm{d}\, x \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1-ik} e^{(1-ik)x} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(1-ik)} (e^{\pi}(-1)^k - e^{-\pi}(-1)^k) \\ &= \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1-ik)} \end{aligned}$$

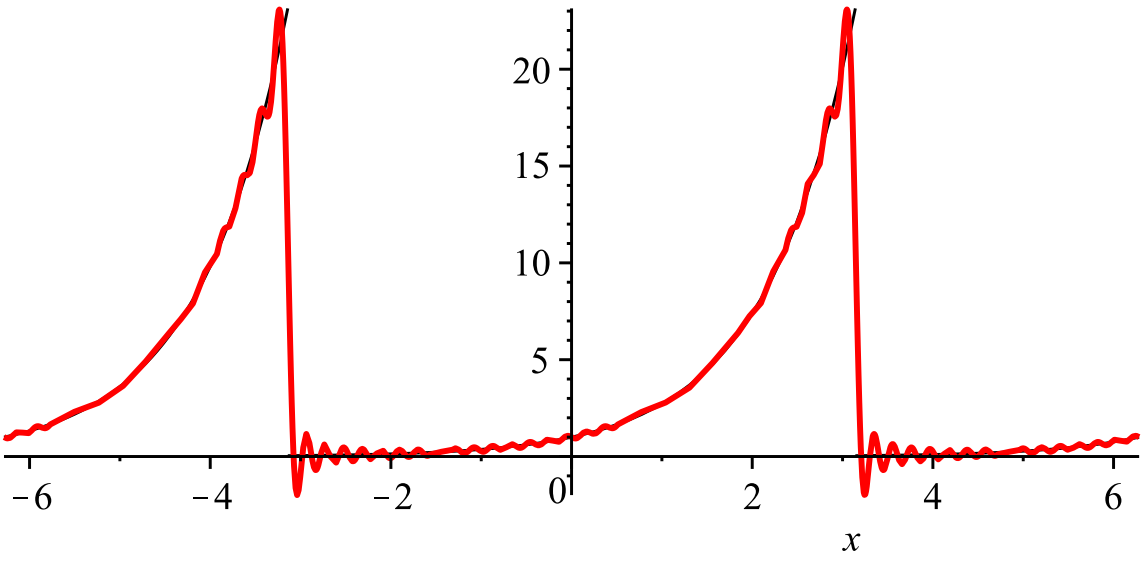
für $k \in \mathbb{Z}$.

Damit gilt für die reellen Fourier-Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2c_0 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \\
a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1 - ik)} + \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1 + ik)} \\
&= \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi}) \left((1 + ik) + (1 - ik)\right)}{2\pi(1 - ik)(1 + ik)} \\
&= \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1 + k^2)} \\
b_k &= i(c_k - c_{-k}) = i \left(\frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1 - ik)} - \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1 + ik)} \right) \\
&= \frac{i(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi}) \left((1 + ik) - (1 - ik)\right)}{2\pi(1 - ik)(1 + ik)} \\
&= \frac{(-1)^{(k+1)} k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1 + k^2)}
\end{aligned}
$$

für $k \in \mathbb{N}$.

Die Graphik zeigt das 30. Fourier-Polynom von f.



7.6.5. Satz.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eine* 2π*-periodische Funktion mit Fourier-Reihe*

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Dann gelten die Verschiebungsregeln

$$f(x+a) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^{ika} c_k) e^{ikx}$$

für $a \in \mathbb{R}$*, und*

$$e^{inx} f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-n} e^{ikx}$$

für $n \in \mathbb{Z}$*.*

7.7. Funktionen mit beliebiger Periode

Es sei $T > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion. Nach 7.1.2 ist dann $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{f}(x) = f(x \cdot \frac{T}{2\pi})$$

2π-periodisch. Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gilt also

$$f(x) = \tilde{f}(\omega x).$$

Wir nehmen jetzt an, dass die reelle bzw. komplexe Fourier-Reihe von $\tilde{f}$ gegeben ist durch

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,x)$$

bzw.

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Es gilt dann also

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,\omega x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,\omega x)$$

bzw.

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x},$$

d.h. f und $\tilde{f}$ haben die gleichen Fourier-Koeffizienten. Der Unterschied besteht darin, dass f nach den Funktionen

$$1, \cos(\omega x), \ldots, \cos(j\,\omega x), \ldots, \sin(\omega x), \ldots, \sin(j\,\omega x), \ldots$$

entwickelt wird (die alle T-periodisch sind).

Man kann die Fourier-Koeffizienten von f auch direkt berechnen, ohne auf $\tilde{f}$ zu transformieren. Dazu betrachtet man den Vektorraum aller T-periodischen Funktionen und definiert ein Skalarprodukt durch

$$\langle f \,|\, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^T f(x) g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Dann bilden die Funktionen

$$1, \cos(\omega x), \ldots, \cos(j\,\omega x), \ldots, \sin(\omega x), \ldots, \sin(j\,\omega x), \ldots$$

ein Orthogonalsystem. Für das Skalarprodukt dieser Funktionen mit sich selbst ergibt sich mit Hilfe der Substitution $u = \omega x$, $\mathrm{d}\,u = \omega\,\mathrm{d}\,x$

$$\langle \cos(j\,\omega x) \,|\, \cos(j\,\omega x) \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos(j\,\omega x))^2\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\frac{\omega T}{2}}^{\frac{\omega T}{2}} (\cos(j\,u))^2 \frac{\mathrm{d}\,u}{\omega}$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(j\,u))^2\,\mathrm{d}\,u = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$$

für $j \in \mathbb{N}$; und analog für $\sin(j\,\omega x)$.

7.7.1. Satz.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine integrierbare* T*-periodische Funktion, und es sei* $\omega = \frac{2\pi}{T}$*. Dann sind die reellen bzw. komplexen Fourier-Koeffizienten von* f *gegeben durch*

$$a_j = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(j\,\omega x)\,\mathrm{d}\,x$$

für $j \in \mathbb{N}_0$*,*

$$b_j = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(j\,\omega x)\,\mathrm{d}\,x$$

für $j \in \mathbb{N}$*,*

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-ik\omega x}\,\mathrm{d}\,x$$

für $k \in \mathbb{Z}$*.*

.

Die reelle bzw. komplexe Fourier-Reihe von f lautet dann

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,\omega x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,\omega x)$$

bzw.

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ik\omega x}.$$

7.7.2. Satz.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine* T*-periodische Funktion mit Fourier-Reihe*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,\omega x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,\omega x)$$

bzw.

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ik\omega x}.$$

Für $r > 0$ *ist dann* $x \mapsto f(rx)$ *eine* $\frac{T}{r}$*-periodische Funktion, und für ihre Fourier-Reihe gilt mit* $\omega' = \frac{2\pi}{T/r} = r\omega$

$$f(rx) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,\omega' x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,\omega' x)$$

bzw.

$$f(rx) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ik\omega' x}.$$

7.7.3. Bemerkungen.

1. Satz 7.7.2 verallgemeinert die Aussage, dass f und $\widetilde{f}$ die gleichen Fourier-Koeffizienten haben. Es ändert sich nur das Funktionensystem, nach dem die Funktionen entwickelt werden.
2. Wenn man die Periode zu groß wählt, etwa indem man eine T-periodische Funktion als $2T$-periodisch behandelt, erhält man trotzdem die gleichen Fourier-Reihen. In der $2T$-periodischen Fourier-Entwicklung sind dann alle Koeffizienten von Summanden, die nicht schon T-periodisch sind, gleich Null.
3. Alle Aussagen über Fourier-Reihen von 2π-periodischen Funktionen gelten auch für Fourier-Reihen von Funktionen mit beliebiger Periode, wenn sie geeignet modifiziert werden.
   So lautet etwa die Besselsche Ungleichung, vgl. 7.5.4,

$$\langle f \,|\, f \rangle \;=\; \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)^2 \,\mathrm{d}\,x \geqq \frac{T a_0^2}{4} + \frac{T}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2).$$

7.7.4. Fourier-Entwicklung nicht-periodischer Funktionen.

Gelegentlich, etwa bei der Untersuchung partieller Differentialgleichungen, möchte man eine Funktion $f : (0, L] \to \mathbb{R}$ auf einem beschränkten Intervall in eine Fourier-Reihe entwickeln. Dazu bieten sich die folgenden drei Möglichkeiten an:

1. Man setzt f zu einer L-periodischen Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fort durch

   $$F(x) = f(x - kL) \quad \text{falls } kL < x \leqq (k+1)L, k \in \mathbb{Z}$$

   und entwickelt F in eine Fourier-Reihe.
2. Man setzt f zu einer ungeraden $2L$-periodischen Funktion fort und entwickelt diese in eine reine Sinus-Reihe.
3. Man setzt f zu einer geraden $2L$-periodischen Funktion fort und entwickelt diese in eine reine Cosinus-Reihe.

7.7.5. Ungerade Fortsetzung.

Die ungerade Fortsetzung einer Funktion $f : (0, L] \to \mathbb{R}$ erhält man durch

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } 0 < x \leqq L \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -f(-x) & \text{für } -L < x < 0 \end{cases}$$

sowie $F(x - 2kL) = F(x)$ für $(2k-1)L < x \leqq (2k+1)L, k \in \mathbb{Z}$. Mit $\omega = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$ sind die Fourier-Koeffizienten gegeben durch

$$b_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(j\,\omega x)\,\mathrm{d}\,x,$$

und für die Fourier-Reihe ergibt sich

$$F(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\,\omega x).$$

7.7.6. Gerade Fortsetzung.

Die gerade Fortsetzung einer Funktion $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ erhält man durch

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } 0 \leqq x \leqq L \\ f(-x) & \text{für } -L < x < 0 \end{cases}$$

sowie $F(x - 2kL) = F(x)$ für $(2k-1)L < x \leqq (2k+1)L, k \in \mathbb{Z}$. Mit $\omega = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$ sind die Fourier-Koeffizienten gegeben durch

$$a_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(j\,\omega x)\,\mathrm{d}\,x,$$

und für die Fourier-Reihe ergibt sich

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\,\omega x).$$

7.7.7. Beispiel.

Wir betrachten $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - 1$ für $0 < x < 2$ und $f(0) = f(2) = 0$. Die 2-periodische Fortsetzung von f ist ungerade, daher ist ihre Fourier-Reihe eine reine Sinusreihe und stimmt mit der Fourier-Reihe der ungeraden 4-periodischen Fortsetzung F_u überein, vgl. 7.7.3. Mit $T = 2$ und $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ ergibt sich

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \sin(j\pi x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^2 x \sin(j\pi x)\,\mathrm{d}\,x - \int_0^2 \sin(j\pi x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[-\frac{1}{j\pi} x \cos(j\pi x) \right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{j\pi} \cos(j\pi x)\,\mathrm{d}\,x + \left[\frac{1}{j\pi} \cos(j\pi x) \right]_0^2 \\ &= -\frac{2}{j\pi} \cos(2j\pi) + \left[\left(\frac{1}{j\pi} \right)^2 \sin(j\pi x) \right]_0^2 = -\frac{2}{j\pi} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Fourier-Reihe

$$F_u(x) \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j\pi x)}{j}.$$

Für die 4-periodische gerade Fortsetzung F_g erhalten wir mit $L = 2$ und $\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{2}$ für die Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)\cos\left(\frac{j\pi}{2}x\right)\mathrm{d}\,x = \frac{(-1)^j - 1}{\left(j\frac{\pi}{2}\right)^2} \\ &= \begin{cases} \dfrac{-8}{(j\pi)^2} & \text{falls } j \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } j \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

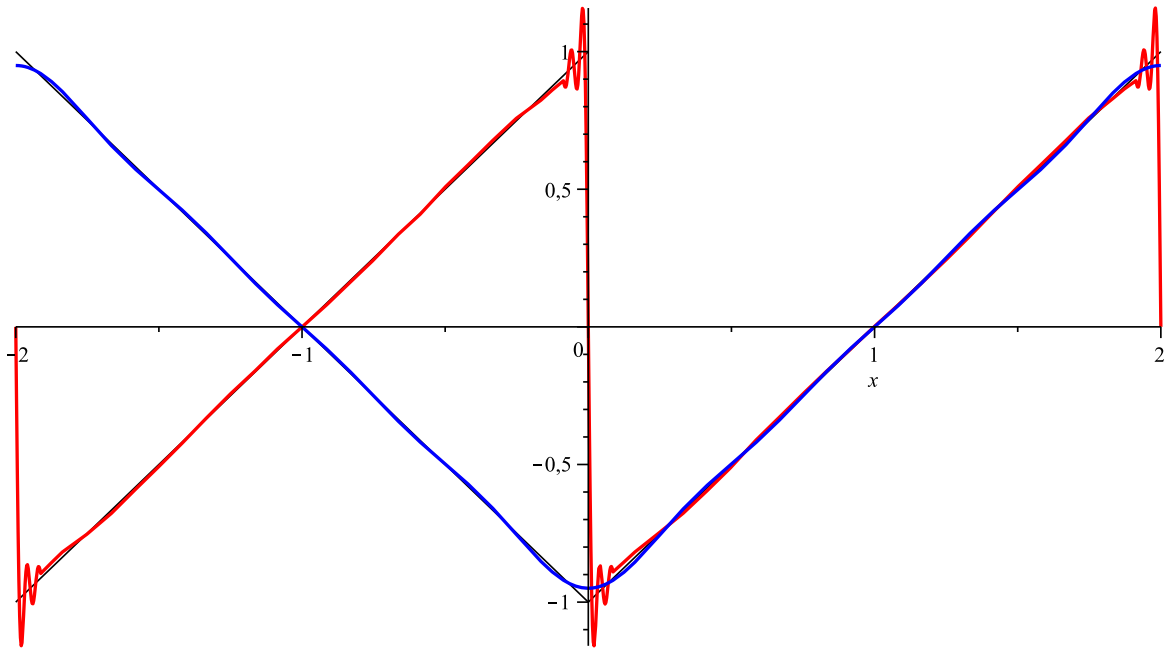
und damit die Fourier-Reihe

$$F_g(x) \sim -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right).$$

Für $0 < x < 2$ konvergieren beide Fourier-Reihen und wir erhalten

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(j\pi x)}{j} = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) = x - 1.$$

Die folgende Graphik zeigt das 50. Fourier-Polynom von F_u und das 7. Fourier-Polynom von F_g.



8. Partielle Differentialgleichungen

8.1. Grundbegriffe

8.1.1. Definition.

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ und $g : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt

$$g(x_1, \ldots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k y}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}}) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung in n Variablen. Wir nehmen an, dass die Argumente von g nach aufsteigender Ableitungsordnung angeordnet sind. Dann heißt $k = a_1 + \cdots + a_n$ die Ordnung der Differentialgleichung.

Eine partielle Differentialgleichung stellt also eine Beziehung zwischen einer reellwertigen Funktion von n reellen Veränderlichen und ihren partiellen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung her.

8.1.2. Definition.

Eine auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der Differentialgleichung, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ gilt

$$(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}}) \in D$$

und

$$g(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}}) = 0.$$

8.1.3. Beispiel.

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0.$$

Es sei $h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(x_2, \ldots, x_n)$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Dabei muss h keinerlei Voraussetzungen wie etwa Stetigkeit oder Differenzierbarkeit erfüllen, f ist in jedem Fall stetig partiell nach x_1 differenzierbar. Das Beispiel zeigt, dass die Lösungsmenge einer partiellen Differentialgleichung i.A. nicht durch endlich viele Parameter beschreibbar ist; im Gegensatz zu den Verhältnissen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Um die Eindeutigkeit der Lösung zu erzwingen, wird man die Werte der Funktion und einiger ihrer partiellen Ableitungen auf einer Hyperfläche (im $\mathbb{R}^2$ also einer Kurve und im $\mathbb{R}^3$ einer Fläche) vorgeben müssen.

8.1.4. Bemerkungen.

1. Wir werden uns im Wesentlichen auf die Betrachtung von partiellen Differentialgleichungen in 2 Veränderlichen beschränken, und diese dann mit x und y (oder auch x und t) bezeichnen. Die abhängige Variable wird dann mit u bezeichnet. Weiterhin schreiben wir oft u_x bzw. u_{xx} statt $\frac{\partial u}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ etc.
2. Wir werden keine geschlossene Theorie entwickeln (können), sondern versuchen, durch Betrachtung einiger technisch relevanter Beispiele einen Einblick in das Gebiet zu erhalten.

8.2. Die Wärmeleitungsgleichung

Bis auf Normierung gilt für die Temperatur $u(x,t)$ an der Stelle x zur Zeit t in einem (eindimensional idealisierten) Stab aus homogenen Material die partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$u_t = a^2 u_{xx} + r(x,t).$$

Dabei ist a^2 der Koeffizient der Temperaturleitfähigkeit, und $r(x,t)$ ist eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion, die äußere Einflüsse modelliert. Diese Gleichung heißt die Wärmeleitungsgleichung. Wenn $r(x,t) = 0$ gilt, heißt sie homogen, andernfalls inhomogen.
Wir wollen diese Gleichung mit einer von Fourier entwickelten Methode behandeln.

8.2.1. Die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen.

Sei $L > 0$ eine Konstante. Wir suchen Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

mit

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0 = u(L,t) \quad &\text{für alle } t \geqq 0 \qquad \text{(Randbegingung)} \\ u(x,0) = f(x) \quad &\text{für alle } x \in [0,L] \qquad \text{(Anfangsbedingung)} \end{aligned}$$

für eine vorgegebene Funktion $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(L) = 0$.
Die physikalische Deutung ist folgende: Der Stab hat die Länge $L > 0$ und wird durch das Intervall $[0, L]$ modelliert. Die Enden liegen an Eis und haben die konstante Temperatur Null. Am Anfang (t = 0) ist auf dem Stab eine Temperaturverteilung durch f gegeben. Äußere Einflüsse bestehen nicht. Die Lösung beschreibt, wie die Temperatur mit der Zeit überall auf Null zurückgeht.

8.2.2. Produktansatz nach Euler-Bernoulli.

Wir schließen die triviale Lösung $u(x,t) = 0$ für alle $x \in [0, L], t \geqq 0$ aus, und setzen die Lösung als Produkt der Form

$$u(x,t) = v(x)s(t)$$

an. Das ergibt

$$u_t = v(x)\frac{\partial s}{\partial t} = v(x)s'(t) \quad \text{und} \quad u_{xx} = s(t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = s(t)v''(x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$u_t = v(x)s'(t) = a^2 u_{xx} = a^2 s(t)v''(x)$$

bzw.

$$\frac{s'(t)}{s(t)} = a^2 \frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nur von t und die rechte nur von x abhängt, kann die Gleichung nur erfüllt sein, wenn beide Seiten konstant sind. Also gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{s'(t)}{s(t)} = a^2 \frac{v''(x)}{v(x)} = -a^2\lambda$$

bzw.

$$v'' + \lambda v = 0 \quad \text{und} \quad s' + a^2\lambda s = 0,$$

d.h. v und s erfüllen gewöhnliche lineare Differentialgleichungen 2-ter bzw. 1-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

8.2.3. Bestimmung der Ortsfunktion.

Die Ortsfunktion v genügt der linearen Differentialgleichung

$$y'' + \lambda y = 0.$$

Diese hat das charakteristische Polynom $p(X) = X^2 + \lambda$ mit den Nullstellen $\pm\sqrt{-\lambda}$.
Falls $\lambda < 0$ gilt, bilden nach 4.4.5 die Funktionen

$$e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad \text{und} \quad e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

ein Fundamentalsystem. Also gibt es $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$v(x) = r_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + r_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Jetzt benutzen wir die Randbegingungen

$$u(0,t) = v(0)s(t) = 0 = u(L,t) = v(L)s(t).$$

Da dies für alle t gelten soll, folgt $v(0) = v(L) = 0$.

Damit erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} v(0) = &\quad r_1 + r_2 &&= 0 \\ v(L) = &\quad r_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} + r_2 e^{\sqrt{-\lambda}L} &&= 0. \end{aligned}$$

Für die Determinante der Koeffizientenmatrix ergibt sich $e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} \neq 0$, also hat das System nur die triviale Lösung $r_1 = r_2 = 0$. Dann gilt auch $u(x,t) = v(x)s(t) = 0$, und diese Lösung haben wir ausgeschlossen.
Falls $\lambda = 0$ gilt, bilden nach 4.4.5 die Funktionen

$$1 \quad \text{und} \quad x$$

ein Fundamentalsystem. Also gibt es $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$v(x) = r_1 + r_2 x.$$

Aus den Randbedingungen folgt jetzt

$$v(0) = r_1 = 0 \quad \text{und} \quad v(L) = r_1 + r_2 L = 0$$

und damit $r_1 = r_2 = 0$, also der ausgeschlossene Fall $u(x,t) = 0$.

Im Fall $\lambda > 0$ bilden nach 4.4.5 die Funktionen

$$\cos(\sqrt{\lambda}x) \quad \text{und} \quad \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

ein Fundamentalsystem. Also gibt es $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$v(x) = r_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + r_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Aus den Randbegingungen folgt

$$v(0) = r_1 = 0$$

und dann

$$v(L) = r_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Also gilt

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi, n \in \mathbb{N},$$

bzw.

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, n \in \mathbb{N}.$$

Nur diese Werte kommen für λ in Frage.

8.2.4. Bestimmung der Zeitfunktion.

Die Zeitfunktion s genügt der linearen Differentialgleichung

$$y' + a^2 \lambda y = 0.$$

Nach 4.4.5 bildet die Funktion

$$e^{-a^2 \lambda t}$$

ein Fundamentalsystem. Da λ nur die Werte $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n \in \mathbb{N}$ annehmen kann, erhalten wir also die Funktionen

$$e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, n \in \mathbb{N}.$$

Für die Wärmeleitungsgleichung erhalten wir damit die Basislösungen

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, n \in \mathbb{N}.$$

8.2.5. Satz.

Die Wärmeleitungsgleichung ist linear, d.h. für je zwei Lösungen u und w der homogenen Wärmeleitungsgleichung und für alle $c \in \mathbb{R}$ sind

$$u + w \quad \textit{und} \quad cu$$

ebenfalls Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung.

Beweis.

Es gilt

$$(u+w)_t = u_t + w_t = a^2 u_{xx} + a^2 w_{xx} = a^2 (u+w)_{xx}$$

sowie

$$(cu)_t = cu_t = ca^2 u_{xx} = a^2 (cu)_{xx}$$

□

8.2.6. Lösung des Rand-Anfangswertproblems.

Wegen der Linearität der homogenen Wärmeleitungsgleichung ist jede Linearkombination von Basislösungen wieder eine Lösung. Unter geeigneten Voraussetzungen (die wir als erfüllt annehmen) gilt dies auch für unendliche Linearkombinationen. Daher machen wir für die gesuchte Lösung den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}$$

mit $c_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Für $t = 0$ gilt

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x).$$

Also müssen wir f in eine Fourier-Reihe entwickeln, die nur Sinusterme enthält. Das gelingt mit Hilfe der ungeraden Fortsetzung nach 7.7.5.

Für die Fourier-Koeffizienten erhalten wir

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}\,x = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)\mathrm{d}\,\xi.$$

Wir erhalten die Lösung also in Form einer zeitabhängigen Fourier-Reihe.
Für den n-ten Fourier-Koeffizienten zur Zeit t gilt

$$c_n(t) = c_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}.$$

Für $t \to \infty$ gehen alle diese Koeffizienten gegen Null (wie erwartet), und zwar mit wachsendem n immer schneller.

8.2.7. Der Integralkern.

Mit Hilfe des sogenannten Integralkerns

$$K : [0, L] \times [0, \infty) \times [0, L] \to \mathbb{R}$$

mit

$$K(x, t, \xi) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} \xi\right)$$

kann man die Lösung folgendermaßen in Integralform darstellen

$$u(x, t) = \int_0^L K(x, t, \xi) f(\xi) \, \mathrm{d}\xi.$$

Der Integralkern ist von f unabhängig, daher gilt diese Darstellung für jede Anfangsverteilung f.

8.2.8. Beispiel.

Wir nehmen an, dass die Temperatur zur Zeit $t = 0$ konstant ist, d.h. wir setzen

$$f(x) = c \quad \text{für} \quad 0 < x < L.$$

Für die ungerade Fortsetzung gilt also

$$F_u(x) = -c \quad \text{für} \quad -L < x < 0.$$

Für $L = \pi$, also $T = 2\pi$, und $c = \frac{\pi}{4}$ haben wir die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion bereits in 7.4.4 berechnet. Beim Übergang von der Periode $T = 2L$ zur Standardperiode 2π ändern sich die Fourier-Koeffizienten nicht, vgl. 7.7. Nach 7.4.1 erhalten wir die gesuchten Fourier-Koeffizienten indem wir die Fourier-Koeffizienten der Rechteckfunktion aus 7.4.4 mit $\frac{4c}{\pi}$ multiplizieren.

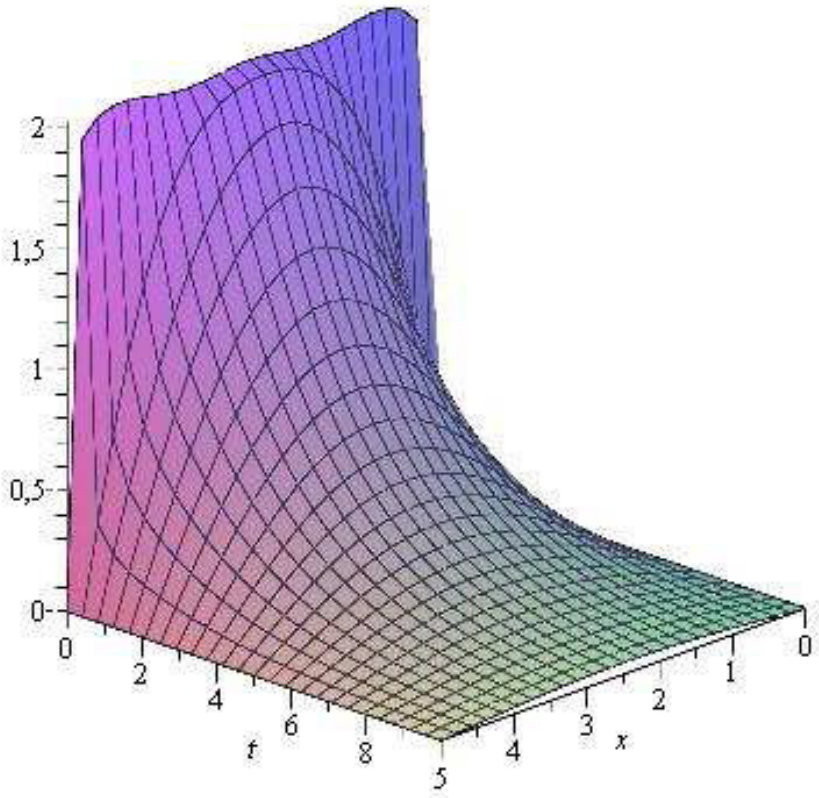
Also gilt

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{4c}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

und wir erhalten die Lösung

$$u(x,t) = \frac{4c}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L} x\right) e^{-\frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{L^2} t}.$$

Im nachfolgendem Beispiel gilt $a = 1, c = 2, L = 5$. Für die Darstellung der Anfangsbedingung $u(x,0) = c$ wird das 101. Fourier-Polynom benutzt.



8.2.9. Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen.

Sei $L > 0$ eine Konstante. Wir suchen Lösungen der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a^2 u_{xx} + r(x,t)$$

mit

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0 = u(L,t) \quad \text{für alle } t \geqq 0 \qquad \text{(Randbegingung)} \\ &u(x,0) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [0,L] \qquad \text{(Anfangsbedingung)} \end{aligned}$$

Die Wärmeleitungsgleichung ist linear, vgl. 8.2.5. Daher erhält man die allgemeine Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung indem man zu einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung addiert.

8.2.10. Variation der Konstanten.

Nach 8.2.6 hat die homogene Wärmeleitungsgleichung die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

mit $c_n \in \mathbb{R}$. Aufgrund unserer Erfahrungen bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen machen wir für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Wir erhalten

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{L^2} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}t}$$

und

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}t} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}t}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung

$$u_t = a^2 u_{xx} + r(x,t)$$

liefert

$$r(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Also müssen wir $r(x,t)$ als zeitabhängige Fourier-Reihe schreiben, in der nur Sinus-Terme vorkommen. Das gelingt wieder mit der ungeraden Fortsetzung nach 7.7.5. Mit

$$b_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L r(x,t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}\,x$$

gilt

$$r(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Damit erhalten wir

$$c_n'(t) = b_n(t) e^{\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}t}$$

für $n \in \mathbb{N}$, und $c_n(t)$ kann durch eine Integration berechnet werden.

Für $t = 0$ gilt

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Wenn wir jetzt die Integrationskonstanten so wählen, dass

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

gilt, dann erfüllt die gefundene Lösung auch noch die Anfangsbedingung.

8.2.11. Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit inhomogenen Randbedingungen.

Sei $L > 0$ eine Konstante. Wir suchen Lösungen der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a^2 u_{xx} + r(x,t)$$

mit

$$\begin{array}{ll} u(0,t) = g(t); \quad u(L,t) = h(t) \quad \text{für alle } t \geqq 0 & \text{(Randbegingung)} \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [0,L] & \text{(Anfangsbedingung)} \end{array}$$

Die inhomogenen Randbegingungen $u(0,t) = g(t)$ und $u(L,t) = h(t)$ lassen sich in die Inhomogenität $r(x,t)$ und die Anfangsverteilung $f(x)$ "einbauen", und damit lässt sich dieser Fall auf die bereits behandelten zurückführen.
Wir nehmen an, dass g und h differenzierbar sind.

Wir definieren $\tilde{r} : [0, L] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $\tilde{f} : [0, L] \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{r}(x, t) = r(x, t) - \left(1 - \frac{x}{L}\right) g'(t) - \frac{x}{L} h'(t)$$

und

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \left(1 - \frac{x}{L}\right) g(0) - \frac{x}{L} h(0).$$

Sei jetzt $\tilde{u} : [0, L] \times [0, \infty] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\tilde{u}_t = a^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{r}(x, t)$$

sowie

$$\tilde{u}(0, t) = 0 = \tilde{u}(L, t) \quad \text{für alle } t \geqq 0$$

und

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x) \quad \text{für alle } x \in [0, L].$$

Wir setzen

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + \left(1 - \frac{x}{L}\right) g(t) + \frac{x}{L} h(t).$$

Dann gilt

$$u_{xx} = \tilde{u}_{xx}$$

und

$$\begin{aligned} u_t &= \tilde{u}_t + \left(1 - \frac{x}{L}\right) g'(t) + \frac{x}{L} h'(t) \\ &= a^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{r}(x, t) + \left(1 - \frac{x}{L}\right) g'(t) + \frac{x}{L} h'(t) \\ &= a^2 u_{xx} + r(x, t). \end{aligned}$$

Also genügt u der ursprünglichen Differentialgleichung.
Für $t = 0$ gilt

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tilde{u}(x, 0) + \left(1 - \frac{x}{L}\right) g(0) + \frac{x}{L} h(0) \\ &= \tilde{f}(x) + \left(1 - \frac{x}{L}\right) g(0) + \frac{x}{L} h(0) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Also erfüllt f auch die Anfangbedingung.

Für die Ränder $x = 0$ und $x = L$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \widetilde{u}(0,t) + \left(1 - \frac{0}{L}\right) g(t) + \frac{0}{L} h(t) \\ &= g(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u(L,t) &= \widetilde{u}(L,t) + \left(1 - \frac{L}{L}\right) g(t) + \frac{L}{L} h(t) \\ &= h(t). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich, dass u eine Lösung des ursprünglichen Rand-Anfangswertproblems darstellt.

8.2.12. Bemerkungen.

1. Das Beispiel zeigt, dass man bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen von Anfang an sehr viel Wert auf die Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen legen muss.
2. Das Verfahren lässt sich auf die 2- und 3-dimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$ bzw. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ verallgemeinern. Für rechteckige Platten bzw. quaderförmige Körper führt eine mehrfache Anwendung des Produktansatzes zum Ziel. Anders geformte Körper muss man durch geeignete Koordinatentransformationen auf Rechtecke bzw. Quader abbilden. Anwendung des Produktansatzes auf die transformierte Gleichung führt dann für die Komponentenfunktionen häufig auf eine lineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten.

8.3.1. Definition.

Die lineare partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + r(x,t),$$

$c > 0$, heißt 1-dimensionale Wellengleichung. Falls $r(x,t) = 0$ gilt, heißt sie homogen, andernfalls inhomogen.

Die Wellengleichung beschreibt die Ausbreitung von Wellen in einem 1-dimensionalen homogenen Medium. Die Funktion r ist 2-mal stetig differenzierbar und beschreibt äußere Einflüsse.

8.3.2. Satz (d'Alembert).

Es seien $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei 2-mal stetig differenzierbare Funktionen. Dann ist $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

eine Lösung der 1-dimensionalen homogenen Wellengleichung. Umgekehrt ist jede 2-mal stetig differenzierbare Lösung u der homogenen Wellengleichung von dieser Form.

Der Satz von d'Alembert besagt, dass die Lösungen der Wellengleichung Überlagerungen von zwei Wellen sind, die ihre Form im Lauf der Zeit nicht ändern und sich mit der konstanten Geschwindigkeit c links und rechts entlang des Mediums ausbreiten.

Beweis.

Die Funktionen $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien 2-mal stetig differenzierbar, und es sei $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, dann gilt:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x+ct) + G(x-ct)\right) = F'(x+ct) + G'(x-ct)$$

und

$$u_{xx} = F''(x+ct) + G''(x-ct),$$

sowie

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(F(x+ct) + G(x-ct)\right) = cF'(x+ct) - cG'(x-ct)$$

und

$$u_{tt} = c^2F''(x+ct) + c^2G''(x-ct).$$

Also ist u eine Lösung der Wellengleichung.

Um zu zeigen, dass sich jede Lösung so erhalten lässt, führt man neue Koordinaten durch $\xi = x + ct, \eta = x - ct$ ein, und zeigt mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel, vgl. A 4.8.3, dass in diesen Koordinaten gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u = 0.$$

Dann kann man wie in 8.1.3 argumentieren. Details als Übung. □

8.3.3. Satz.

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2-mal und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 1-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

gegeben durch die d'Alembertsche Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}\,s.$$

Beweis.

Sei u eine Lösung des Anfangswertproblems. Nach 8.3.2 gibt es $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).$$

Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x)$$

und

$$u_t(x,0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x).$$

Also ist $H = cF - cG$ eine Stammfunktion von g, und wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= f(x) \\ cF(x) - cG(x) &= H(x) \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} H(x) \\ G(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} H(x). \end{aligned}$$

Wenn man zu H eine Integrationskonstante addiert, ändert sich u nicht. Also können wir für H eine beliebig Stammfunktion von g wählen, und wir wählen

$$H(x) = \int_0^x g(s) \,\mathrm{d}\, s.$$

Aus den Rechenregeln für bestimmte Integrale, insbesondere A 3.6.5 üder die Vertauschung der Integrationsgrenzen, folgt

$$\begin{aligned} H(x+ct) - H(x-ct) &= \int_0^{x+ct} g(s) \,\mathrm{d}\, s - \int_0^{x-ct} g(s) \,\mathrm{d}\, s \\ &= \int_0^{x+ct} g(s) \,\mathrm{d}\, s + \int_{x-ct}^{0} g(s) \,\mathrm{d}\, s = \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \,\mathrm{d}\, s. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x+ct) + G(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \left(H(x+ct) - H(x-ct)\right) \\ &= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \,\mathrm{d}\, s, \end{aligned}$$

und damit die d'Alembertsche Lösungsformel. □

8.3.4. Bemerkungen.

1. Die Funktion f beschreibt die Anfangsauslenkung, und die Funktion g die Anfangsgeschwindigkeit der Wellenbewegung.
2. Wenn keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden ist, d.h. es gilt $g = 0$, dann teilt sich die Welle in zwei gleiche Hälften, die sich mit der gleichen Geschwindigkeit c in die beiden verschiedenen Richtungen des Mediums bewegen.
3. Bei der d'Alembertschen Lösung geht man von einem in beiden Richtungen unbegrenzten Medium aus. Damit lassen sich sehr lange Medien modellieren. Bei begrenzten Medien muss man noch Randbegingungen berücksichtigen.

8.3.5. Die schwingende Saite.

Es seien $L, c > 0$ vorgegeben. Wir betrachten das folgende Rand-Anfangswertproblem:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$\left.\begin{array}{ll} u(0,t) = 0 = u(L,t) & \text{für alle } t \geqq 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{für alle } x \in [0,L] \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{für alle } x \in [0,L] \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(Randbegingungen)} \\ \text{(Anfangsbedingungen)} \end{array}$$

Physikalisch wird dadurch einen an den beiden Enden eingespannte schwingende Saite modelliert, deren Anfangsauslenkung und -geschwindigkeit durch die Funktionen f und g beschrieben werden.

8.3.6. Satz.

Die Bedingungen aus 8.3.5 seien erfüllt. Wir definieren eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *durch*

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}\,s & \text{falls } 0 \leqq x \leqq L \\ -\frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2c}\int_0^{-x} g(s)\,\mathrm{d}\,s & \text{falls } -L < x < 0 \end{cases}$$

und $2L$*-periodische Fortsetzung. Dann ist die Lösung des Rand-Anfangswertproblems 8.3.5 gegeben durch*

$$u(x,t) = F(x+ct) - F(-x+ct).$$

Beweis.

Gemäß 8.3.3 können wir die Lösung der Wellengleichung in der Form

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

mit $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ansetzen. Aus der ersten Randbegingung $u(0,t) = 0$ folgt

$$u(0,t) = F(ct) + G(-ct) = 0.$$

Da dies für alle t gilt, erhalten wir

$$F(x) = -G(-x) \quad \text{bzw.} \quad G(x) = -F(-x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus der zweiten Randbegingung $u(L,t) = 0$ folgt jetzt

$$u(L,t) = F(L+ct) + G(L-ct) = F(L+ct) - F(-L+ct) = 0,$$

also hat F die Periode $2L$.

Aus dem Beweis von 8.3.3 entnehmen wir, dass gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}\,s \\ G(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}\,s \end{aligned}$$

für $0 \leqq x \leqq L$. Also gilt

$$F(x) = -G(-x) = -\frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2c}\int_0^{-x} g(s)\,\mathrm{d}\,s$$

für $-L < x < 0$. Damit hat F die im Satz angegebene Form, und es gilt

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) = F(x+ct) - F(-x+ct).$$

□

8.3.7. Bemerkungen.

1. Für festes x hat die Funktion $t \mapsto u(x,t)$ die Periode $\frac{2L}{c}$, wie man aus der Beziehung

$$\begin{aligned} u\left(x, t+\frac{2L}{c}\right) &= F\left(x + c\left(t+\frac{2L}{c}\right)\right) - F\left(-x + c\left(t+\frac{2L}{c}\right)\right) \\ &= F(x+ct) - F(-x+ct) = u(x,t) \end{aligned}$$

sieht. Also schwingen alle Punkte der Saite mit der gleichen Periode $\frac{2L}{c}$.

2. Im Falle verschwindender Anfangsgeschwindigkeit $g = 0$ ist $F = G$ die Hälfte der ungeraden $2L$-periodische Fortsetzung von f und es gilt

$$u(x,t) = F(x+ct) + F(x-ct).$$

8.3.8. Beispiel (Die gezupfte Saite).

Wenn man eine Saite in der Mitte anzupft, gilt für die Anfangsgeschwindigkeit $g = 0$, und die Anfangsauslenkung hat die Form eines gleichschenkligen Dreiecks, beschrieben durch

$$f(x) = \begin{cases} bx & \text{für } 0 \leqq x \leqq \dfrac{L}{2} \\ bL - bx & \text{für } \dfrac{L}{2} < x \leqq L. \end{cases}$$

Die Auslenkung der Seite wird zu jedem Zeitpunkt t durch eine stückweise lineare Funktion beschrieben.
Für $x = \frac{L}{2}$ gilt

$$u\left(\frac{L}{2}, t\right) = F\left(\frac{L}{2} + ct\right) + F\left(\frac{L}{2} - ct\right) = 2F\left(\frac{L}{2} + ct\right)$$

da der Graph von F symmetrisch zur Geraden $x = \frac{L}{2}$ liegt. Also führt der Punkt $x = \frac{L}{2}$ eine Sägezahnschwingung aus.

Die Funktion F ist die Hälfte der ungeraden Fortsetzung von f, also gilt

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}bx & \text{für } -\dfrac{L}{2} \leqq x \leqq \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{1}{2}(bL - bx) & \text{für } \dfrac{L}{2} < x \leqq \dfrac{3L}{2}. \end{cases}$$

Sei jetzt $0 \leqq t \leqq \frac{L}{2c}$, also $ct \leqq \frac{L}{2}$. Für $0 \leqq x \leqq \frac{L}{2} - ct$ gilt dann

$$-\frac{L}{2} \leqq x - ct \leqq x + ct \leqq \frac{L}{2}$$

und damit

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x+ct) + F(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}b(x+ct) + \frac{1}{2}b(x-ct) = bx \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Für $\frac{L}{2} - ct \leqq x \leqq \frac{L}{2} + ct$ gilt

$$-\frac{L}{2} \leqq x - ct \leqq \frac{L}{2} \leqq x + ct \leqq \frac{3L}{2}$$

und damit

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x+ct) + F(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}(Lb - b(x+ct)) + \frac{1}{2}b(x-ct) = \frac{1}{2}Lb - bct. \end{aligned}$$

Dieser Wert hängt nicht von x ab.
Für $\frac{L}{2} + ct \leqq x \leqq L$ gilt

$$\frac{L}{2} \leqq x - ct \leqq x + ct \leqq \frac{3L}{2},$$

und damit

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x+ct) + F(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}(Lb - b(x+ct)) + \frac{1}{2}(Lb - b(x-ct)) = Lb - bx \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Also hat die Welle zu jedem Zeitpunkt t die Form eines Trapezes.

Zusammengefasst gilt für $0 \leqq t \leqq \frac{L}{2c}$

$$u(x,t) = \begin{cases} bx & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{L}{2} - ct \\ \frac{1}{2}Lb - bct & \text{für } \frac{L}{2} - ct \leqq x \leqq \frac{L}{2} + ct \\ Lb - bx & \text{für } \frac{L}{2} + ct \leqq x \leqq L. \end{cases}$$

Für $t = \frac{L}{2c}$ gilt

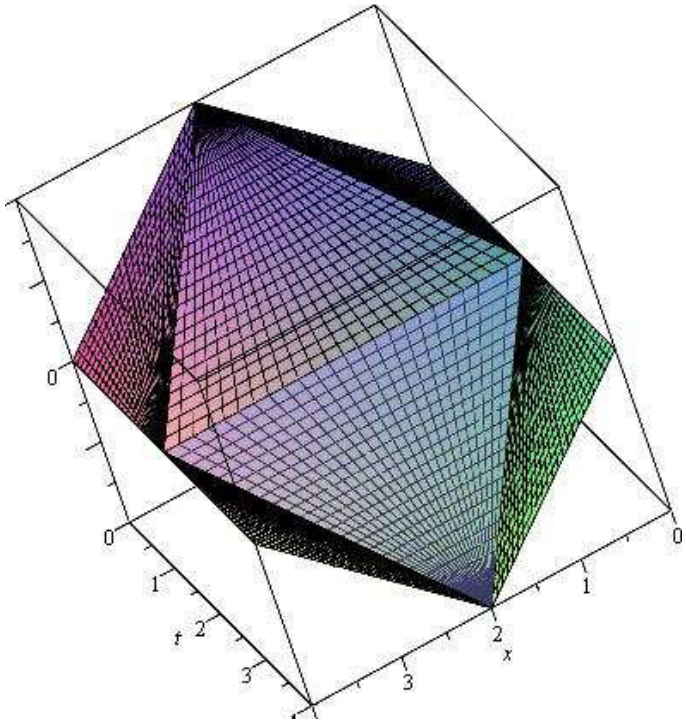
$$u(x, \frac{L}{2c}) = 0,$$

und für $\frac{L}{2c} \leqq t \leqq \frac{L}{c}$ gilt

$$u(x,t) = -u(x, \frac{L}{2c} - t).$$

Also baut sich das Ausgangsdreieck über Trapeze bis auf Null ab, baut sich dann in der Gegenrichtung über die gespiegelten Trapeze zum gespiegelten Ausgangsdreieck auf, und dieser Vorgang setzt sich periodisch fort.

Wir betrachten das Beispiel mit $c = 1, L = 4, b = 1$:



8.3.9. Bemerkungen.

1. Man kann das Problem der schwingenden Saite auch mit einem Produktansatz nach Euler-Bernoulli behandeln. Man erhält dann die Lösung in Form einer zeitabhängigen Fourier-Reihe.
2. Für die höherdimensionale Wellengleichung $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ funktionieren beide Ansätze und führen in der Regel auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen 2-ter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten.

8.4.1. Definition.

Es sei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(+ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

der 2- bzw. 3-dimensionale Laplace-Operator, vgl. A 5.2.7. Die inhomogene lineare partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(+ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f(x, y, z)$$

für eine stetige Funktion f heißt Poisson-Gleichung. Die zugehörige homogene Gleichung ($f = 0$) heißt die Potentialgleichung (oder Laplace-Gleichung).
Die 2-mal stetig differenzierbaren Lösungen der Potentialgleichung heißen harmonische Funktionen.

8.4.2. Satz.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine einfach zusammenhängende, offene Teilmenge, d.h. D "hat keine Löcher", vgl. A 5.1.3. Sei $u : D \to \mathbb{R}$ harmonisch, dann hat das Vektorfeld $K : D \to \mathbb{R}^2$ mit

$$K(x, y) = (-u_y(x, y), u_x(x, y))$$

ein Potential $v : D \to \mathbb{R}$, und v ist eindeutig bis auf eine additive Konstante. Die Funktion v ist ebenfalls harmonisch und heißt eine harmonisch Konjugierte von u.
Eine harmonisch Konjugierte von v ist durch $-u$ gegeben.
Das Funktionenpaar (u, v) genügt den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad v_x = -u_y.$$

Umgekehrt bilden je zwei Funktionen $u, v : D \to \mathbb{R}$, die den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen, ein Paar von harmonisch konjugierten Funktionen.

Beweis.

Auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet D ist nach A 5.2.4 das Verschwinden der Rotation $\operatorname{rot} K = K_{2x} - K_{1y}$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials. Wegen $K_{2x} - K_{1y} = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ist die Bedingung erfüllt, und K besitzt ein Potential $v : D \to \mathbb{R}$, welches nach A 5.1.5 eindeutig ist bis auf eine additive Konstante. Es gilt

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

nach dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, vgl. A 4.3.10. Also ist v harmonisch. Das zu v gehörende Vektorfeld $\tilde{K} : D \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\tilde{K}(x, y) = (-v_y(x, y), v_x(x, y)) = (-u_x(x, y), -u_y(x, y)),$$

und dieses Vektorfeld hat offensichtlich $-u$ als Potential. Also ist $-u$ eine harmonisch Konjugierte von v. Außerdem genügen u und v den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Seien jetzt $u, v : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen. Dann gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

und

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0,$$

d.h. u und v sind harmonisch und v ist die harmonisch Konjugierte von u. □

8.4.3. Satz.

Es seien $D \subsetneqq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u, v : D \to \mathbb{R}$ ein Paar von harmonisch konjugierten Funktionen. Dann ist das Vektorfeld $F : D \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x, y) = (u(x, y), -v(x, y))$$

quellen- und wirbelfrei, d.h. es gilt

$$\operatorname{rot} F = \operatorname{div} F = 0,$$

vgl. 2.4.5.
Sei umgekehrt $F = (u, v) : D \to \mathbb{R}^2$ ein 2-mal stetig differenzierbares quellen- und wirbelfreies Vektorfeld, dann bilden u und $-v$ ein Paar harmonisch konjugierter Funktionen.

Beweis.

Seien $u, v : D \to \mathbb{R}$ harmonisch konjugiert, dann gelten für u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad v_x = -u_y.$$

Also gilt

$$\operatorname{rot} F = -F_{2x} + F_{1y} = v_x + u_y = 0$$

und

$$\operatorname{div} F = F_{1x} + F_{2y} = u_x - v_y = 0,$$

d.h. F ist quellen- und wirbelfrei.
Sei umgekehrt $F = (u, v)$ quellen- und wirbelfrei, dann gilt

$$\operatorname{rot} F = -v_x + u_y = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} F = u_x + v_y = 0.$$

Also genügen u und $-v$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und sind nach 8.4.2 harmonisch konjugierte Funktionen. □

8.4.4. Bemerkung.

Aus den Sätzen 8.4.2 und 8.4.3 folgt, dass die folgenden drei Klassen von Funktionen äquivalent sind (auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet im $\mathbb{R}^2$):

- harmonische Funktionen;
- Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;
- quellen- und wirbelfreie Vektorfelder.

Beispiele für derartige Vektorfelder sind:

- Geschwindigkeitsfelder von stationären, inkompressiblen Strömungen;
- Elektrostatische Felder.

8.4.5. Bemerkung.

In der Mathematik betrachtet man statt des Vektorfeldes $F = (u, -v)$ lieber das Vektorfeld $G = (u, v)$. Für dessen Jacobi-Matrix gilt

$$JG = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}.$$

Das ist die Matrix einer Drehstreckung. Da die Jacobi-Matrix die lineare Approximation einer Funktion beschreibt, vgl. A 4.7.2, wird G in jedem Punkt von einer Drehstreckung approximiert.
Aus der geometrischen Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen, vgl. A 0.4.2, folgt, dass die Drehstreckungen auch durch Multiplikation mit komplexen Zahlen beschrieben werden können. Der Multiplikation mit JG entspricht die Multiplikation mit der komplexen Zahl $u_x + iv_x$.

Aus diesem Grund werden zur Beschreibung harmonischer Funktionen gern komplexe Zahlen benutzt. Man setzt $z = x + iy$ und schreibt $G(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, sowie $G'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$.
Die Untersuchung dieser komplex differenzierbaren Funktionen ist Gegenstand der Funktionentheorie. Es stellt sich heraus, dass eine Funktion genau dann komplex differenzierbar ist, wenn sie in jedem Punkt durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird.
Die harmonischen Funktionen sind also genau die Real- und Imginärteile von komplex differenzierbaren Funktionen.

8.4.6. Beispiele.

1. Polynome sind komplex differenzierbar, daher sind ihre Real- und Imaginärteile harmonisch. Für

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

erhalten wir die harmonischen Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad v(x, y) = 2xy.$$

Für

$$f(z) = z^4 = (x + iy)^4 = x^4 + 4x^3iy + 6x^2(iy)^2 + 4x(iy)^3 + (iy)^4$$

erhalten wir entsprechend

$$u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \text{und} \quad v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3.$$

2. Die Exponentialfunktion ist komplex differenzierbar. Es gilt $e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$, also sind

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{und} \quad v(x,y) = e^x \sin y$$

harmonisch.

3. Verkettungen von komplex differenzierbaren Funktionen sind wieder komplex differenzierbar. So liefert $f(z) = e^{z^2}$ die harmonischen Funktionen

$$u(x,y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy) \quad \text{und} \quad v(x,y) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy).$$

8.5. Klassifikation von Differentialgleichungen

8.5.1. Definition.

Eine partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung in 2 Veränderlichen heißt linear, wenn sie von folgender Form ist

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = r(x,y).$$

Dabei sind $a_{11}, \ldots, r : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Die Differentialgleichung heißt homogen, wenn $r(x,y) = 0$ gilt, andernfalls inhomogen.

8.5.2. Satz.

Die Menge der Lösungen einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung bildet einer Untervektorraum des Raumes aller 2-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D.
Die Menge der Lösungen einer inhomogenen linearen partiellen Differentialgleichung erhält man, indem man zu einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung addiert.

Der Beweis folgt wie üblich aus der Tatsache, dass die Funktion u und ihre Ableitungen linear in die Differentialgleichung eingehen.

8.5.3. Definition.

Das Symbol einer linearen partiellen Differentialgleichung 2-ter Ordnung im Punkt $(x, y) \in D$ ist die quadratische Form $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$q(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y) \\ a_{12}(x,y) & a_{22}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung heißt im Punkt $(x, y) \in D$

- elliptisch wenn q (positiv oder negativ) definit ist, d.h. alle Eigenwerte (der Matrix) von q haben dasselbe Vorzeichen, vgl. L 6.1.8;
- hyperbolisch wenn q indefinit ist, d.h. die Eigenwerte von q haben verschiedenes Vorzeichen;
- parabolisch wenn mindestens ein Eigenwert von q gleich Null ist.

Die Differentialgleichung heißt elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, wenn sie in jedem Punkt die entsprechende Eigenschaft hat.

8.5.4. Beispiele.

1. Das Symbol der Wärmeleitungsgleichung $a^2 u_{xx} - u_t = 0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} q(\xi,\eta) &= \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(x,t) & a_{12}(x,t) \\ a_{12}(x,t) & a_{22}(x,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = a^2 \xi^2. \end{aligned}$$

   Also ist die Wärmeleitungsgleichung parabolisch.

2. Für die Wellengleichung $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$ ergibt sich

$$q(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = c^2 \xi^2 - \eta^2.$$

   Also ist die Wellengleichung hyperbolisch.

3. Für die Potentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ erhält man

$$q(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi^2 + \eta^2.$$

   Also ist die Potentialgleichung elliptisch.

8.5.5. Bemerkung.

Die drei von uns untersuchten Differentialgleichungen sind die Prototypen für ihre jeweilige Klasse.
In der Regel werden stationäre, d.h. zeitunabängige, Zustände durch elliptische Differentialgleichungen beschrieben.
Ausgleichsprozesse werden durch parabolische Differentialgleichungen modelliert.
Hyperbolische Differentialgleichungen beschreiben Transportprozesse.