1 Bemerkungen

Unter der Annahme dass sich die Rakete ohne jeglichen gravitative oder sonstige störenden Einflüsse bewegen kann, die erreichte Geschwindigkeit sich in Regionen $v << c$ bewegt und der Treibstoff mit einer konstanten Ausstossgeschwindigkeit ω relativ zur Raktete ausgestossen wird gilt die Raketengleichung:

$$v(t) = v_0 + \omega \cdot \ln\left(\frac{m(0)}{m(t)}\right), \tag{1}$$

wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit t, v_0 die schon vor der ersten Zündung vorliegende Geschwindigkeit, $m(t)$ die Masse des Raumschiffs zur Zeit t und m_0 die Startmasse meint.

Ich rechne der Einfachheit halber ohne eine konkrete Zeiteinheit! Die nötige Korrektur für konkrete Zeiten ist trivialerweise jeweils eine entsprechende Konstante. Des weiteren verwende ich willkürliche Massen ohne jeglichen Zusammenhang zur Realität - entsprechende Daten sind auch nicht besonders gut aufzutreiben und passen wenn dann nicht zu dieser Aufgabe hier.

2 Konkrete Rechnung

1. Fordert man dass die Rakete während einer Beschleunigungseinheit (Dauer $1\,t$) eine konstante Treibstoffmasse m_t ausstösst und diese zwei mal mitführt so dass die geforderte Beschleunigungseinheit zwei mal ausgeführt werden kann, der "Tank" aber anschliessend leer ist, d.h. $m(t) = m_r + (2-t) \cdot m_t$ mit $t \in [0,2]$, für $t > 2 : m(t) = m_r$). Unter willkürlich gewählten Massen von $m_r = 10\,t$ sowie $m_t = 40\,t$ ergibt sich eine Bedingung für die Ausstossgeschwindigkeit ω:

$$v(1) = 40'000\,km/h \stackrel{!}{=} \omega \cdot \ln\left(\frac{90\,t}{50\,t}\right) \Rightarrow \omega = 68'051.9\,km/h \tag{2}$$

$$v_{end} = v(2) = 68'051.9\,km/h \cdot \ln\left(\frac{90\,t}{10\,t}\right) = 149'525.3\,km/h \tag{3}$$

   Dass das Δv nach der zweiten Beschleunigungsphase grösser ausfällt als nach der ersten Beschleunigung ist der Impulserhaltung zu "verdanken" und war zu erwarten.

2. Modelliert man die noch an Bord vorhandene Treibstoffmasse nicht linear wie oben, beispielsweise mit $m_t(t) = m_t \cdot e^{-t}$, $t \in [0, \infty)$, so erhält man mit $m_t = 80\,t$ (der gesamten Treibstoffmasse aus der vorherigen Annahme) und $m_r = 10\,t$ (wie vorher):

$$v(1) = 40'000\,km/h \stackrel{!}{=} \omega \cdot \ln\left(\frac{90\,t}{10\,t + 80\,t \cdot e^{-1}}\right) \Rightarrow \omega = 48'468.8\,km/h \tag{4}$$

$$v(2) = 48'468.8\,km/h \cdot \ln\left(\frac{90\,t}{10\,t + 80\,t \cdot e^{-2}}\right) = 70'937.3\,km/h \tag{5}$$

Δv ist hier kleiner da bei $t = 2$ nicht die komplette Treibstoffmasse ausgestossen wurde und ω kleiner ist weil das massgebende Massenverhältnis $\frac{m(0)}{m(t)}$ hier zu "Zeit" $t = 1$ grösser war.

3 Fazit

Die "Aufgabe" erlaubt zu viele Freiheitsgrade - ich habe diese schon radikal eingeschränkt und mir aus diesen Freiheiten immer noch zwei beliebige Varianten herauspicken können. Physikalisch machen die erhaltenen Ergebnisse Sinn - sogar die Annahme, dass $v << c$ passt, die Resultate bewegen sich nicht in Grössenordnungen in denen relativistisches Rechnen wirklich nötig wäre, praxisrelevant sind sie aber nur bedingt. Das gewählte Massenverhältnis ist in der Realität bisher in einer ähnlichen Grössenordnung - die erreichten Ausstossgeschwindigkeiten werden mit den momentanen Möglichkeiten aber nie und nimmer erreicht.