dinatensystem ein. Die *Summe* $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_1 + w_2 \end{pmatrix}$ bildet die vierte Ecke des von $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{w}$ aufgespannten Parallelogramms (siehe Abbildung 15.4).

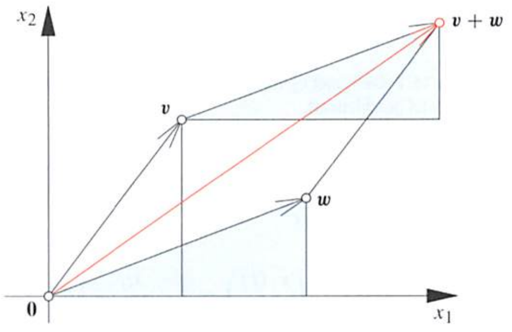


Abbildung 15.4 Der Punkt $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ entsteht durch Abtragen von $\boldsymbol{w}$ auf $\boldsymbol{v}$, er ist eine Ecke des durch $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{w}$ aufgespannten Parallelogramms.

Wir können auch sagen, wir tragen den von $\boldsymbol{0}$ nach $\boldsymbol{w}$ weisenden Pfeil gleich lang und gleichgerichtet von $\boldsymbol{v}$ aus ab.

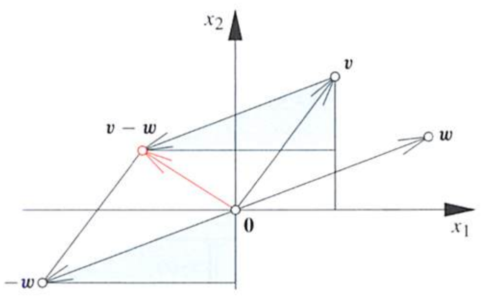


Abbildung 15.5 Der Punkt $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ entsteht durch Addition von $-\boldsymbol{w}$ zu $\boldsymbol{v}$.

Bei der *Differenz* ist die Situation die gleiche, da $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$ gilt. Der Vektor $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix}$ ergänzt also $\boldsymbol{v}$, $-\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{0}$ ebenfalls zu einem Parallelogramm (siehe Abbildung 15.5). Wir erhalten also $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ durch Abtragen von von $-\boldsymbol{w}$ auf $\boldsymbol{v}$.

Nach der Regel *Endpunkt minus Anfangspunkt* tragen wir den Pfeil mit Endpunkt $\boldsymbol{v}$ und Anfangspunkt $\boldsymbol{w}$ vom Ursprung $\boldsymbol{0}$ aus ab (siehe Abbildung 15.6).

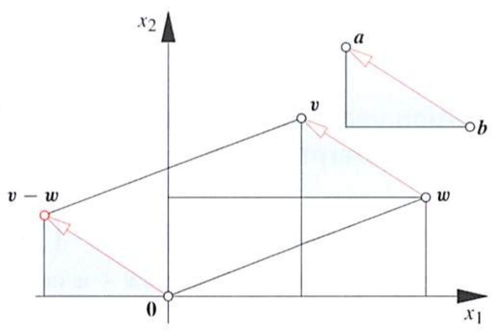


Abbildung 15.6 Der Punkt $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{0}$.

Für alle Punktepaare $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ sind die Pfeile mit Endpunkt $\boldsymbol{a}$ und Anfangspunkt $\boldsymbol{b}$ gleich lang und gleich gerichtet.

Kurz: Es gibt eine einzige *Translation*, also Parallelverschiebung, die die Anfangspunkte in die Endpunkte überführt (siehe Abbildung 15.6), also $\boldsymbol{w}$ in $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}$ in $\boldsymbol{a}$ oder auch $\boldsymbol{0}$ in $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$.

Anwendungsbeispiel Das *Superpositionsprinzip* besagt: Wirken auf einen Körper verschiedene Kräfte, so ist der Effekt wie das Wirken einer einzelnen Kraft, der resultierenden Kraft. Diese ist die *vektorielle* Summe der verschiedenen Kräfte (siehe Abbildung 15.7).

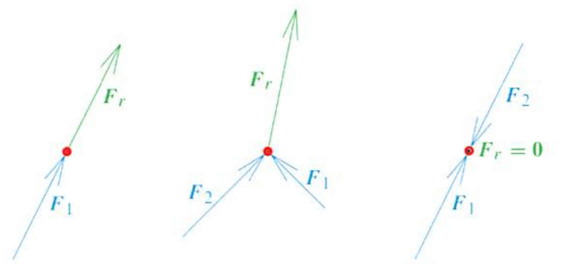


Abbildung 15.7 Wirken auf einen Massenpunkt Kräfte ein, so ist die resultierende Kraft die vektorielle Summe der einwirkenden Kräfte. ◀

Die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren kann man geometrisch interpretieren

Wir gehen von einem Punkt $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ aus. In Abbildung 15.8 stellen wir $\lambda \cdot \boldsymbol{v}$ für verschiedene Werte von λ in dem gegeben Koordinatensystem dar.

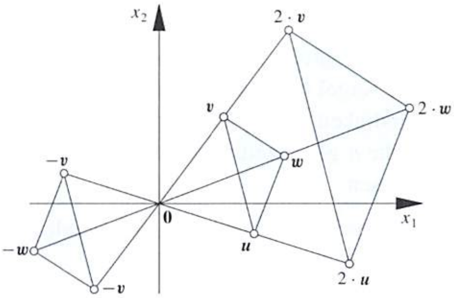


Abbildung 15.8 Die Punkte $\lambda \cdot \boldsymbol{u}$, $\lambda \cdot \boldsymbol{v}$, $\lambda \cdot \boldsymbol{w}$ für $\lambda = 2$ und $\lambda = -1$ im $\mathbb{R}^2$.

Aus der Abbildung 15.8 geht hervor, dass $\lambda \cdot \boldsymbol{v}$ der Bildpunkt von $\boldsymbol{v}$ bei einer *Streckung* mit dem Zentrum $\boldsymbol{0}$ und dem Streckfaktor λ ist, die Abbildung zeigt diese Streckung zum Streckfaktor $\lambda = 2$ sowie jene zum Streckfaktor $\lambda = -1$.

 zurück

15.1 Vektorraum Begriffserklärung

Bearbeitung der Selbstfrage S. 500
zurück

(V3) Es gibt ein Element $\mathbf{0} \in V$ mit $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$ (Existenz eines **neutralen Elementes**).
(V4) Es gibt ein $\boldsymbol{v}' \in V$ mit $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \mathbf{0}$ (Existenz eines **entgegengesetzten Elementes**).
(V5) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$ (Kommutativität).
(V6) $\lambda \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \lambda \cdot \boldsymbol{v} + \lambda \cdot \boldsymbol{w}$.
(V7) $(\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{v} + \mu \cdot \cancel{\boldsymbol{w}}$. $\boldsymbol{v}$ falsch → $v \Rightarrow \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
(V8) $(\lambda\, \mu) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{v})$.
(V9) $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

Kommentar: In (V8) bezeichnet $\lambda\,\mu$ das Produkt von λ mit μ in $\mathbb{K}$. Wir lassen für das Produkt in $\mathbb{K}$ – wie dies ja oft üblich ist – den Punkt für die Multiplikation weg.

?

Kann ein Vektor verschiedene entgegengesetzte Elemente haben?

$\boxed{\text{Selbstfrage}}$ Lösung

Antwort: der wichtige Punkt der Frage ist, verschiedene entgegengesetzte Elemente. Siehe (V4) $v' \in V$ und
$v + v' = 0$
wenn es ein weiteres v'' gäbe, dann muss es die Bedingung erfüllen
$v + v'' = 0$, da aber auch
$v + v' = 0$ gilt
$v' = v'' \Rightarrow$ es gibt nur Eins

Erklärung der Antwort:

S. 490
Nein. Sind nämlich $\boldsymbol{v}'$ und $\boldsymbol{v}''$ entgegengesetzte Elemente von $\boldsymbol{v}$, so gilt

$v + v'' = 0$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'') = (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}'' = \boldsymbol{v}''.$$

Also gilt $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}''$.

$v' = v' \quad | + 0$

$0 + v' = v' + \cancel{0}\ (v + v'')$

$v' = v' + (v + v'')$

$v' = v' + v + v''$

$v' = \underbrace{\cancel{(v + v')}}_{=0} + v''$

$v' = v''$

zuerst $v' = v'$ dann $| + 0$. Dadurch wird die Gleichung nicht verändert. Das Linke 0 lass ich weg, aus dem Rechten mach ich $(v + v'')$ wie gefordert. Danach stelle ich die Klammer um $(v + v')$ das ist per Definition 0 und sehe dann $v' = v''$

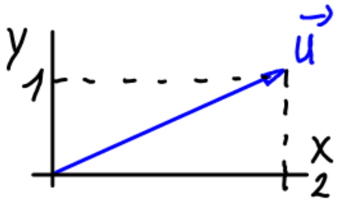
In mathematischen Beweisen/Herleitungen werden gerne $| + 0$ oder $| \cdot 1$ und dann andere Beziehung damit verknüpft.

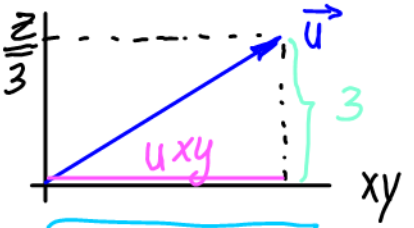
19.2 Das Skalarprodukt im Anschauungsraum

Erklärungen

zurück

der Betrag eines Vektors im $\mathbb{R}^3$ (3 dimensionalen Raum)





$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{u_{xy}^2}$ $\qquad$ $|\sqrt{u_{xy}^2 + u_3^2}$

Ich kann doch so schlecht 3D Skizzen machen, deswegen habe ich 2 Ansichten erstellt. Aber es gibt ja eine Skizze im Buch Abbildung 19.9

$u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 = u \cdot u$ => das Skalarprodukt des Vektors $\vec{u}$ mit sich selbst. Das ist der Betrag des Vektors $|u| = \sqrt{u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3}$.

Bilinearform

Als Bilinearform bezeichnet man in der Linearen Algebra eine Funktion, welche zwei Vektoren einen Skalarwert zuordnet und die linear in ihren beiden Argumenten ist. Quelle

Erklärung zu Abb. 19.10

zurück

$P(P_1 P_2 P_3 \mid 1|4|5)$

$\vec{u}(1|2|4)$ $\qquad$ $\vec{v}(1|6|8)$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-6 \\ 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

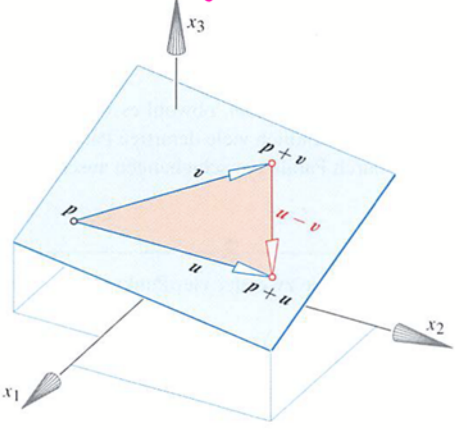


Abbildung 19.10 Der verallgemeinerter Satz des Pythagoras (19.6) gilt auch für nicht rechtwinkelige Dreiecke.