

**Lösungshinweise zur Aufgabe 3.4**

**(i) Satz von Stokes**

Die Oberflächen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  besitzen offenbar denselben Rand,

$$\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\} =: \partial\Omega,$$

der gerade der Einheitskreis ist. Als besonders günstig erweist sich, bevor man (a) und (b) ausrechnet, die Wahl von  $\Omega_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 0\}$ .  $\Omega_3$  ist die Einheitskreisscheibe, die als Rand ebenfalls den Einheitskreis besitzt. Mit dem Satz von Stokes finden wir nun den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, da &= \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega_2} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, da \\ &= \int_{\partial\Omega_3} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega_3} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, da. \end{aligned}$$

Die Werte der drei zu berechnenden Integrale  $W_i$  sind somit identisch, und insbesondere auch gleich dem Randintegral  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$  mit  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Mit  $\mathbf{p}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$  als Parametrisierung erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{p}(\varphi)) \cdot \mathbf{p}'(\varphi) \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = 2\pi \end{aligned}$$

**(ii) Greensche Formeln**

Bestimmen Sie die benötigten Ausdrücke  $\nabla u$ ,  $\nabla w$ ,  $\Delta w$  und  $\mathbf{n}$ . Die eine Seite der Greensche Formel ist dann

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \, ds = \int_{\partial\Omega} u \nabla w \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\partial\Omega} x_1 x_2 (x_1 + x_2) \, ds,$$

und ist somit das Integral aus der Aufgabenstellung. Mit der ersten Greenschen Formel folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} x_1 x_2 (x_1 + x_2) \, ds &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, da + \int_{\Omega} u \Delta w \, da = \int_{\Omega} x_1 + x_2 \, da \\ &= \int_{r=0}^1 r^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \varphi + \sin \varphi \, d\varphi \, dr = 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aufgrund der Periodizität von  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  gilt. Die zweite Greensche Formel liefert unter Ausnutzung des obigen Ergebnisses

$$\int_{\partial\Omega} x_1 x_2 (x_1 + x_2) \, ds = 0.$$